פרק 2 – תנועה בקו ישר

אם נתבונן מסביבנו נבחין בעצמים רבים הנמצאים בתנועה: מכוניות, מטוסים, ספינות, עצמים שנופלים או עצמים שנזרקים ונעים במסלולים עקומים כתוצאה מכוח הכובד ומהשפעת כוחות נוספים. גם אנחנו נעים עם כדור הארץ סביב צירו ובו זמנית גם סביב השמש (מאחר וכדור הארץ משלים כל 24 שעות (בקירוב) סיבוב עצמי שלם וכל 365 ימים (בקירוב) הקפה של השמש). כוכבי הלכת (הפלנטות) נעים סביב השמש, ירחי כוכבי הלכת נעים סביבם, וכל מערכת השמש נעה סביב מרכז גלקסיית שביל החלב (הגלקסיה שלנו). למעשה אנו נמצאים ביקום שבו הגופים נמצאים בתנועה. לא לחינם ידועה האמרה של גליליאו גליליי (1642–1564) "כל המתעלם מתנועה כאילו התעלם מהטבע עצמו".

מכניקה הינה ענף של מדע הפיזיקה שעוסק, בין השאר, בתנועת גופים. חקירת התנועה וגורמיה מאפשרת לנסח חוקים מתמטיים שמהם ניתן לחזות ולתאר מסלולי תנועה של גופים בהשפעת כוחות הפועלים עליהם.

חקירת התנועה במכניקה מתבצעת בשני מישורים: הראשון שנקרא "קינמטיקה", שהוא תיאור מתמטי של תנועת הגוף (המהירות או המיקום כפונקציה של הזמן) ללא קשר לכוחות הגורמים לתנועה זו. לדוגמה, תיאור תנועתו של גוף הנופל נפילה חופשית על פני כדור הארץ, באמצעות ביטויים מתמטיים המתארים את מהירות הגוף ואת מיקומו כפונקציה של הזמן, וזאת מבלי להתייחס ישירות לגורם לתנועה זו, שהוא כוח הכובד. המישור השני שנקרא "דינמיקה", עוסק בקשר בין תנועתו של גוף לכוחות הפועלים עליו.

בפרק זה (תנועה בקו ישר) ובפרק הבא (נפילה חופשית בכיוון אנכי) נדון בקינמטיקה של תנועה בקו ישר. בפרקים שאחרי פרקים אלה נקשור בין התנועה ובין הכוחות, כלומר נדון בדינמיקה.

1. קינמטיקה

1.1. תנועה ותיאור תנועה

תנועה:

תנועה היא שינוי מיקומו של גוף במהלך הזמן.

תיאור תנועה:

תיאור תנועה בפיזיקה משמעו תיאור מיקומו של גוף הנמצא בתנועה כפונקציה של הזמן, וזאת בעזרת אמצעים מתמטיים. לשם תיאור תנועה יש:

(1) לקבוע דרך מוסכמת לקביעת מיקומו של הגוף.

(2) לקבוע את האמצעים המתמטיים המשמשים לתיאור המיקום כפונקציה של הזמן.

1.2. קביעת מיקומו של גוף בתנועה בקו ישר - ציר התנועה

הדרך המוסכמת בפיזיקה לקביעת מיקומו של גוף הנע בקו ישר, היא באמצעות ציר הנמתח לאורך הקו שלאורכו נע הגוף, שנקרא **ציר המיקום**. לשם פשטות נכנה אותו בדרך כלל כציר x. לציר זה יש לקבוע שלושה מאפיינים:

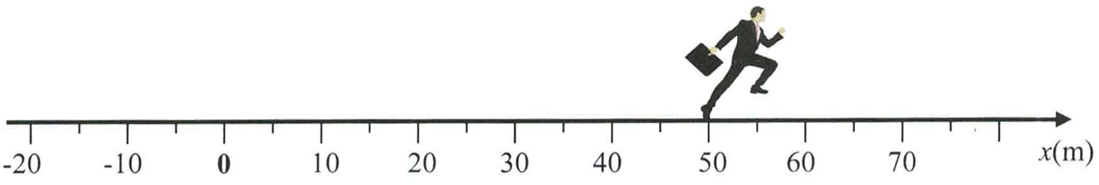
א. ראשית הציר $(x=0)$ שהיא הנקודה שיחסית אליה נקבע מיקום הגוף.

ב. כיוון חיובי שנבחר באופן שרירותי (כיוון זה מיוצג על הציר בחץ).

ג. יחידת מידה לאורך.

מיקומו של הגוף בזמן מסוים נקבע על ידי הקואורדינטה x של הנקודה שבה נמצא הגוף בזמן זה על הציר שנבחר.

באיור 1, $x=50\text{m}$ היא הקואורדינטה שמתארת את מיקומו, בזמן מסוים, של האיש על ציר תנועתו.



איור 1: $x = 50\,\text{m}$ הקואורדינטה שמתארת את מיקומו של האיש, בזמן מסוים, על ציר תנועתו.

1.3. האמצעים המתמטיים המשמשים לתיאור התנועה

תיאור תנועה בפיזיקה משמעו תיאור מיקומו של גוף הנמצא בתנועה כפונקציה של הזמן. מכיוון שמיקומו של הגוף הנע לאורך קו ישר נקבע באמצעות הקואורדינטה x על ציר המיקום שנבחר, נקבל שלתיאור התנועה בפיזיקה, עבור גוף הנע בקו ישר, יש את המשמעות הבאה:

הוא תיאור הקואורדינטה x כפונקציה של הזמן t. כלומר מציאת הפונקציה $x(t)$.

בתיאור זה ישנם שני משתנים. הראשון הוא הזמן t והשני המיקום x. הזמן מהווה **משתנה בלתי תלוי** והמיקום x **משתנה תלוי** (תלוי בזמן). תיאור הקשר בין המשתנה x למשתנה t מתבצע באחד משלושת האמצעים המתמטיים הבאים:

א. טבלת מיקום - זמן:

זוהי שיטה בה מתארים תנועת גוף באמצעות טבלה המכילה שתי עמודות. האחת, מכילה את ערכי הזמן והשנייה מכילה את ערכי המקומות בהם נמצא הגוף באותם זמנים. שיטה זו נפוצה כיום, בעידן הטכנולוגי, כי מספר רב של מדידות הקשורות לתנועה, ובייחוד תנועות מורכבות, מתבצעות

על ידי חיישנים אשר עוקבים אחרי הגוף הנע ומודדים את מיקומו (המרחק שלו מהחיישן) כפונקציה של הזמן. הפלט של חיישנים אלה מתקבל מהמחשב על ידי טבלת מקום – זמן. הנה דוגמה פשוטה:

עוקבים אחרי תנועת גוף הנע לאורך קו ישר באמצעות חיישן המונח על הקו הישר שלאורכו נע הגוף. מיקום החיישן נבחר להיות $x=0$ והזמן $t=0$ הוא הזמן שבו החלה מדידת המיקום. החיישן הוגדר למדוד את מיקום הגוף כל חצי שנייה. תוצאות המדידה מוצגות בטבלה הבאה:

t(s)	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	4.5	5.0	5.5	6.0	6.5	7
x(m)	**4.00**	**5.00**	**6.00**	**7.00**	**8.00**	**9.00**	**10.00**	**11.00**	**12.00**	**10.00**	**8.00**	**6.00**	**4.00**	**2.00**	**0.00**

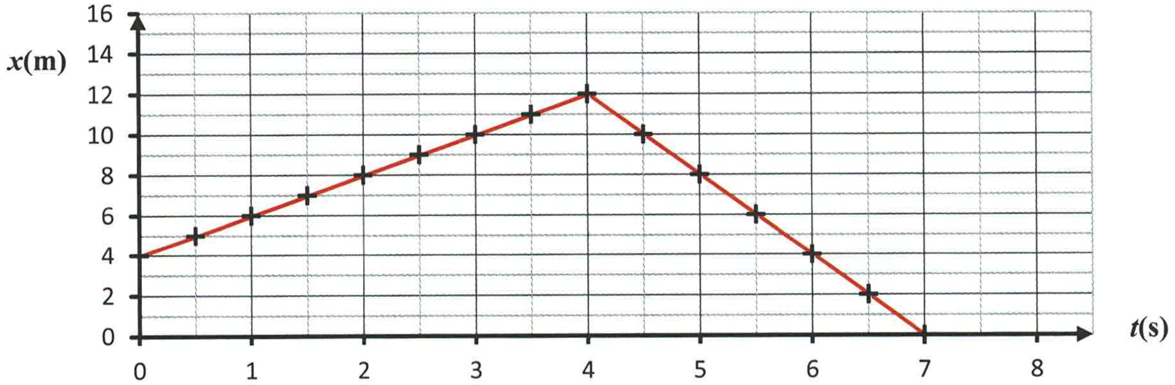
החיסרון של תיאור תנועה באמצעות טבלת מקום-זמן, הוא שמנתוני הטבלה קשה לזהות את צורת התנועה, במיוחד במקרים בהם מספר הדגימות שהחיישנים דגמו גדול, ויכול להגיע לעשרות או מאות דגימות. על כן מקובל להשתמש בייצוג גרפי.

ב. גרף מקום - זמן:

הגרף הוא ייצוג של המדידות שבטבלה על ידי נקודות במערכת צירים מתאימה, כשכל נקודה מתארת את המיקום של הגוף הנע בזמן הנתון.

על מנת לשרטט גרף המתאר את המיקום (x) כפונקציה של הזמן (t) יש להתקדם בצעדים הבאים:

1. משרטטים שני צירים ניצבים, אחד אופקי והאחר אנכי.
2. ליד כל אחד מהצירים רושמים את שמו ואת יחידת המידה המתאימה. מוסכם לבחור את הציר האופקי לקביעת ערכי המשתנה הבלתי תלוי (הזמן במקרה שלנו שיימדד בשניות), ואת הציר האנכי לקביעת ערכי המשתנה התלוי (המיקום במקרה שלנו שיימדד במטרים).
3. קובעים את קנה המידה (ק"מ), כלומר מחלקים את הצירים בהתאם לערכים שבטבלה.
4. משרטטים במערכת הצירים את הנקודות שבטבלה, ומעבירים קו מגמה בין הנקודות. הגרף שלפניך מתאר את התנועה המוצגת בטבלה הנ"ל:



הצגת התנועה באמצעות גרף מספקת לנו תיאור מפורט של אופי התנועה ושלביה השונים.

ג. ביטוי מתמטי:

הדרך השלישית לתיאור התנועה היא על ידי ייצוג מתמטי, פונקציה, המתארת את מיקום הגוף בתלות בזמן. היתרון של שיטה זו הוא שבעזרת הפונקציה המתמטית ניתן לחקור את כל שלבי התנועה ולשרטט גרף ובתנאים מסוימים אף לחזות את המשך התנועה מעבר לטווח זמן המדידות. החיסרון של שיטה זו הוא שבמקרים רבים לא ניתן להגיע לביטוי מתמטי לתיאור התנועה, ויש להסתפק בביטוי מתמטי מקורב.

הביטוי המתמטי המתאר את התנועה המוצגת בגרף הקודם הוא הביטוי הבא:

$$x(t)=\begin{cases}4+2t & 0\le t<4\\ 28-4t & 4\le t\le 7\end{cases} \qquad (1)$$

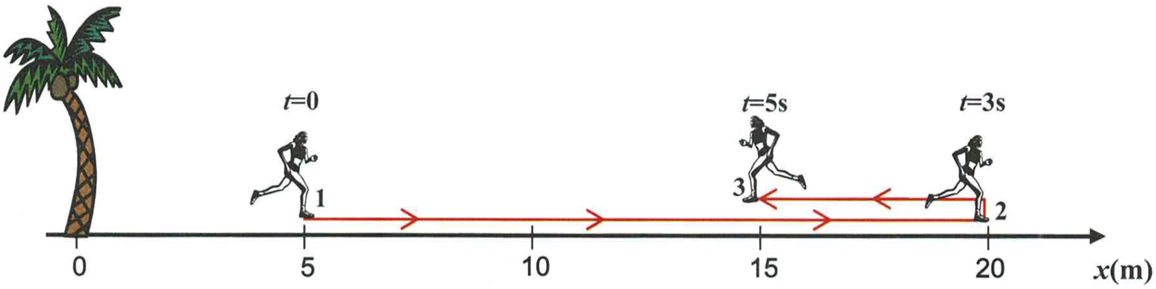
בהמשך נלמד כיצד לפתח ביטויים אלה.

בפרק זה נלמד כיצד לפתח ביטוי מתמטי לתיאור תנועה בשני מקרים חשובים המתייחסים לתנועה בקו ישר: תנועה במהירות קבועה ותנועה בתאוצה קבועה.

לשם כך נצטרך להגדיר קודם גדלים קינמטיים אחדים: דרך, העתק, מהירות, מהירות ממוצעת ומהירות רגעית, ובהמשך גם את התאוצה.

2. דרך, העתק, מהירות, מהירות ממוצעת ומהירות רגעית.

על מנת להגדיר את הגדלים דרך, העתק, מהירות, מהירות ממוצעת ניעזר בדוגמה הבאה: אצנית רצה לאורך כביש ישר שלאורכו נבחר ציר x. נניח שבזמן $t=0$ האצנית עוברת דרך הנקודה $x=5\text{m}$ ונעה בכיוון החיובי של הציר. לאחר 3 שניות (בזמן $t=3\text{s}$) היא מגיעה למיקום $x=20\text{m}$. ברגע זה היא משנה את כיוון הריצה ולאחר שתי שניות נוספות (ב-$t=5\text{s}$) היא מגיעה לנקודה $x=15\text{m}$. שלבי התנועה מתוארים באיור 2.



איור 2: אצנית רצה בקו ישר.

2.1 דרך

הדרך בפרק זמן מסוים של התנועה מוגדרת כאורך המסלול שעבר הגוף בפרק זמן זה.

בדוגמה הנ"ל הדרך שעברה האצנית במהלך פרק הזמן מ-$t=0$ ועד ל-$t=5\text{s}$ היא $15+5=20\text{m}$. נהוג לסמן את הדרך באות s. לכן נרשום ש-$s=20\text{m}$.

הערות:

(1) יחידת הדרך בשיטת היחידות SI היא המטר-m.

(2) הדרך היא גודל חיובי תמיד.

(3) משמעות דרך השווה לאפס במשך פרק זמן מסוים היא שהגוף לא נע בפרק זמן זה.

2.2 העתק

העתק גוף בפרק זמן מסוים שמסומן ב-Δx מוגדר כמיקום הגוף בסוף פרק הזמן ביחס למיקומו בהתחלת פרק זמן זה. על פי הגדרה זו, בתנועה לאורך קו ישר, ההעתק שווה להפרש האלגברי בין קואורדינטת מיקום הגוף בסוף פרק הזמן לבין קואורדינטת מיקומו בתחילת פרק זמן זה.

אם הגוף הנע בקו ישר היה בהתחלת פרק זמן מסוים במיקום x_1 ובסוף פרק זמן זה הגיע למיקום x_2, העתקו בפרק זמן זה נתון על ידי:

$$\Delta x = x_2 - x_1 \qquad (2)$$

בדוגמה הקודמת, העתק האצנית בפרק הזמן $0-3\text{s}$ הוא:

$$\Delta x_1 = 20-5=15\text{m}$$

וההעתק שלה בפרק הזמן $3-5\text{s}$ הוא:

$$\Delta x_2 = 15-20=-5\text{m}$$

שימו לב! שההעתק בשלב השני הוא שלילי, כלומר מיקום האצנית בסוף פרק הזמן ביחס למיקומה בתחילת פרק זמן זה הוא 5 מטרים לכיוון השלילי של הציר. העתק האצנית במהלך פרק הזמן $0-5\text{s}$

הוא:

$$\Delta x = 15 - 5 = 10\,\mathrm{m}$$

שימו לב! הסכום האלגברי של ההעתקים החלקיים שווה להעתק הכולל: $\Delta x = 15 + (-5) = 10\,\mathrm{m}$, כלומר:

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2$$

לעומת זאת, אם נחבר את הערכים המוחלטים של ההעתקים החלקיים נקבל את הדרך שעברה האצנית: $s = |15| + |-5| = 20\,\mathrm{m}$, כלומר:

$$s = |\Delta x_1| + |\Delta x_2|$$

הערות:

(1) יחידת ההעתק בשיטת היחידות SI היא המטר - m.

(2) אם בפרק זמן מסוים מתקיים $x_2 > x_1$ אז העתק הגוף הוא חיובי, כלומר בפרק זמן זה הגוף נע לכיוון החיובי, ואם $x_2 < x_1$ אז העתק הגוף הוא שלילי, כלומר הגוף נע לכיוון השלילי.

(3) אם $x_2 = x_1$, אז ההעתק הוא אפס $(\Delta x = 0)$. זה מתקיים בשני מקרים: הגוף לא נע, או שהוא נע אך חזר לנקודת ההתחלה.

(4) סכום ההעתקים החלקיים של הגוף בפרק זמן מסוים זהה להעתק הכולל של הגוף בפרק זמן זה.

(5) סכום הערכים המוחלטים של ההעתקים החלקיים בפרק זמן מסוים שווה לדרך שהגוף עובר בפרק זמן זה.

(6) ההעתק (ללא ערך מוחלט) שווה לדרך רק אם הגוף נע בכיוון החיובי ואינו משנה את כיוון תנועתו.

2.3 מהירות ומהירות ממוצעת

מהירות גוף מוגדרת כקצב שינוי המיקום של גוף זה.

על מנת להסביר הגדרה זו, נתחיל ממקרה פרטי שבו הגוף נע בקו ישר ועובר העתקים שווים בזמנים שווים. במקרה זה מהירות הגוף מוגדרת כהעתק הגוף ביחידת זמן אחת.

המהירות מסומנת באות v (מהמילה velocity). על פי ההגדרה, אם גוף נע לאורך קו ישר במהירות קבועה, ובזמן מסוים t_1 היה במיקום x_1 ובזמן מאוחר יותר t_2 הוא הגיע למיקום x_2 (ראה איור 3), מהירות הגוף נתונה על ידי:

$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \tag{3}$$

כאשר Δx הוא העתק הגוף בפרק הזמן Δt (ראה איור 3). יחידת המהירות בשיטת היחידות SI היא $\mathrm{m/s}$. יחידה נוספת שימושית בחיי יום יום היא $\mathrm{km/h}$. מתקיים הקשר הבא בין שתי היחידות $\mathrm{km/h}$ ו-$\mathrm{m/s}$:

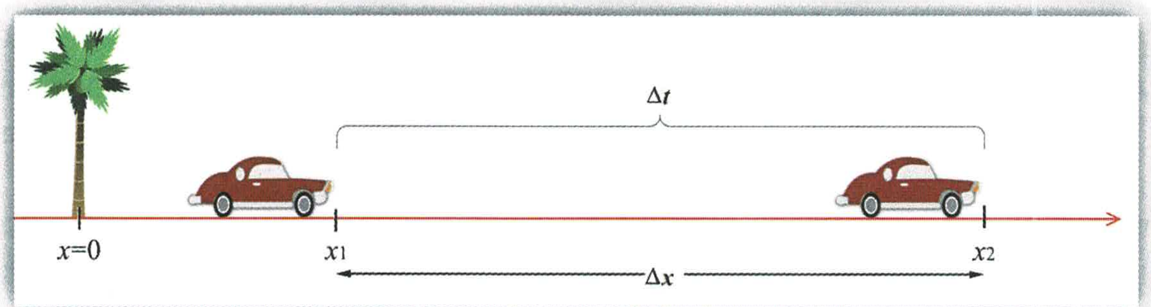
$$\frac{1\,\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = \frac{1000\,\mathrm{m}}{3600\,\mathrm{s}} = \frac{1}{3.6}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \tag{4}$$

מכאן

$$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 3.6\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} \tag{5}$$

מכאן שגוף שמהירותו $1\,\mathrm{m/s}$ עובר בשעה אחת $3.6\,\mathrm{km}$.

אם מהירות הגוף בפרק זמן מסוים אינה קבועה, נהוג להתייחס למהירות ממוצעת או מהירות רגעית. נגדיר כאן את המהירות הממוצעת, ובתת סעיף הבא (2.4) נגדיר את המהירות הרגעית.



איור 3: המהירות של גוף הנע במהירות קבועה שווה להעתק Δx שעובר אותו הגוף מחולק בפרק הזמן Δt.

אם מהירות הגוף אינה קבועה, אז הביטוי (3) נותן לנו את מה שנקרא **המהירות הממוצעת**, שמסומנת ב- $\bar{v}$. כלומר:

$$\bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1} \qquad (6)$$

על פי הקשר האחרון, המהירות הממוצעת של גוף בפרק זמן מסוים מוגדרת כמהירות הקבועה בגודל ובכיוון אשר אם הגוף נע בה, העתקו יהיה זהה באותו פרק זמן.

מכיוון שגוף שעובר אותו העתק בפרק זמן מסוים הוא מגיע לאותו מיקום בסוף פרק זמן זה, ניתן להגדיר את המהירות הממוצעת גם באופן הבא:

מהירות ממוצעת של גוף בפרק זמן מסוים מוגדרת כמהירות הקבועה בגודל ובכיוון אשר אם הגוף נע בה הוא מגיע לאותו מיקום באותו פרק זמן.

מתקיים:

(1) המהירות הממוצעת בפרק זמן מסוים היא גודל חיובי כאשר העתק הגוף בפרק זמן זה הוא חיובי, כלומר כאשר הגוף נע בכיוון החיובי.

(2) המהירות הממוצעת בפרק זמן מסוים היא גודל שלילי כאשר העתק הגוף בפרק זמן זה הוא שלילי, כלומר הגוף נע בכיוון השלילי.

(3) המהירות הממוצעת בפרק זמן מסוים שווה לאפס, כאשר העתק הגוף בפרק זמן זה מתאפס, כלומר כאשר הגוף לא נע, או שהוא נע בפרק זמן זה וחזר לנקודת המוצא.

(4) על פי הגדרת המהירות הממוצעת במשוואה (6) מתקבל שההעתק Δx של הגוף בפרק זמן Δt נתון על ידי:

$$\Delta x=\bar{v}\Delta t \qquad (7)$$

דוגמאות להעתק ולמהירות הממוצעת

דוגמה 1

גוף נע בקו ישר בכיוון החיובי. ברגע שנבחר להיות $t=0$ הגוף היה בנקודה A שבה $x=5\,\text{m}$. ב- $t=5\,\text{s}$ הגיע הגוף לנקודה B שבה $x=20\,\text{m}$. ברגע זה הגוף משנה את כיוון תנועתו לכיוון השלילי. ב- $t=15\,\text{s}$ הוא מגיע לנקודה C שבה $x=-30\,\text{m}$.

א. חשב את ההעתקים החלקיים של הגוף במהלך תנועתו.

ב. חשב את ההעתק הכולל של הגוף במהלך תנועתו.

ג. חשב את הדרך שהגוף עבר.

ד. חשב את המהירות הממוצעת של הגוף בפרקי הזמן: $0-5\,\text{s}$, $5-10\,\text{s}$ ו- $0-15\,\text{s}$.

פתרון:

א. מתקיים $A(0\,\text{s},5\,\text{m})$, $B(5\,\text{s},20\,\text{m})$ ו- $C(15\,\text{s},-30\,\text{m})$.

$$\Delta x(A\to B)=x_B-x_A=20-5=15\,\text{m}$$

$$\Delta x(B\to C)=x_C-x_B=-30-20=-50\,\text{m}$$

ב. ניתן לחשב את ההעתק הכולל בשתי דרכים. **הראשונה:**

$$\Delta x(A\to C)=x_C-x_A=-30-5=-35\,\text{m}$$

השנייה: ההעתק הכולל שווה לסכום

ההעתקים החלקיים:

$$\Delta x(A\to C)=\Delta x(A\to B)+\Delta x(B\to C)=$$
$$=15+(-50)=-35\,\mathrm{m}$$

ג. הדרך היא סכום הערכים המוחלטים של ההעתקים החלקיים של הגוף:

$$s=|\Delta x(A\to B)|+|\Delta x(B\to C)|=$$
$$=15+|-50|=65\,\mathrm{m}$$

ד.

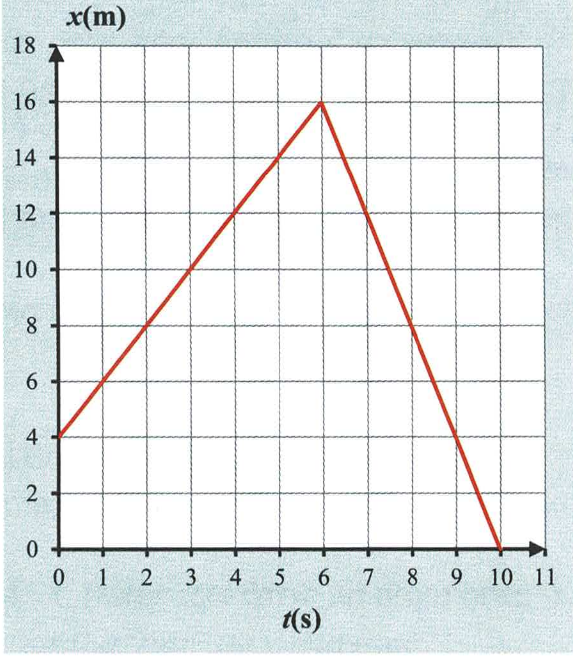
$$\bar{v}(A\to B)=\frac{\Delta x(A\to B)}{\Delta t(A\to B)}=\frac{15\,\mathrm{m}}{5\,\mathrm{s}}=3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$\bar{v}(B\to C)=\frac{\Delta x(B\to C)}{\Delta t(B\to C)}=\frac{-50\,\mathrm{m}}{10\,\mathrm{s}}=-5\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

$$\bar{v}(A\to C)=\frac{\Delta x(A\to C)}{\Delta t(A\to C)}=\frac{-35\,\mathrm{m}}{15\,\mathrm{s}}=-2\tfrac{1}{3}\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

דוגמה 2

הגרף שלפניך מתאר את המיקום כפונקציה של הזמן עבור גוף הנע בקו ישר.



א. קבע באיזה פרק זמן הגוף נע בכיוון החיובי, מצא את העתק הגוף בפרק זמן זה.

ב. קבע באיזה פרק זמן הגוף נע בכיוון השלילי, מצא את העתק הגוף בפרק זמן זה.

ג. חשב בפרק הזמן $0-10\,\mathrm{s}$ את:

1) הדרך שעבר אותה הגוף.

2) העתק הגוף (ההעתק הכולל).

ד. מצא את הזמן שבו הגוף הגיע אל הנקודה שממנה התחיל את תנועתו, ואת הזמן שבו הוא הגיע ל-$x=0$.

ה. חשב את המהירות הממוצעת של הגוף בפרק הזמן $0-10\,\mathrm{s}$.

פתרון:

א. הגוף נע בכיוון החיובי בפרק הזמן: $0-6\,\mathrm{s}$. העתק הגוף בפרק זמן זה הוא:

$$\Delta x_1=x(6)-x(0)=16-4=12\,\mathrm{m}$$

ב. הגוף נע בכיוון השלילי בפרק הזמן: $6-10\,\mathrm{s}$. העתק הגוף בפרק זמן זה הוא:

$$\Delta x_1=x(10)-x(6)=0-16=-16\,\mathrm{m}$$

ג.

(1) $s=|\Delta x_1|+|\Delta x_2|=12+16=28\,\mathrm{m}$

(2) ההעתק הכולל:

$$\Delta x=\Delta x_1+\Delta x_2=12+(-16)=-4\,\mathrm{m}$$

ד. על פי הגרף, הגוף עובר מהנקודה שממנה התחיל את תנועתו $(x=4\,\mathrm{m})$ ב-$t=9\,\mathrm{s}$, והוא מגיע ל-$x=0$ ב-$t=10\,\mathrm{s}$.

ה.

$$\bar{v}(0-10\,\mathrm{s})=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{-4\,\mathrm{m}}{10\,\mathrm{s}}=-0.4\,\mathrm{m/s}$$

2.4 מהירות רגעית

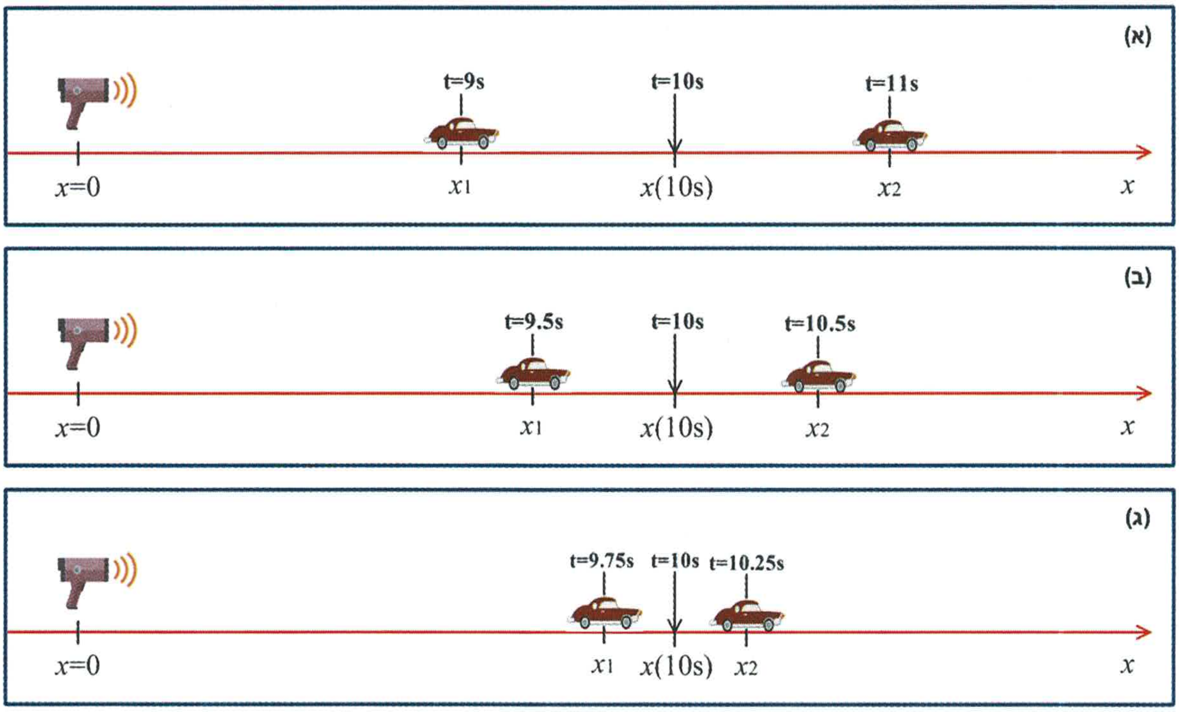
המהירות הרגעית של גוף הנמצא בתנועה היא מהירות גוף זה ברגע מסוים.

השאלה היא איך מחשבים מהירות רגעית?

דרך החישוב של המהירות הרגעית מתבססת על האופן שבו מודדים מהירות זו. מדידת מהירות רגעית נגזרת ממדידת העתק הגוף (Δx) בפרק זמן Δt כאשר Δt הוא קטן מאוד. נבהיר עניין זה על ידי הדוגמה הבאה:

רכב נע לאורך כביש ישר במהירות גדולה, וחולף ברגע $t=0$ ליד שוטר העומד בשול הכביש ומצויד באקדח לייזר למדידת מהירות. נהג הרכב מתחיל להאט ברגע בו הוא חולף ליד השוטר.

השוטר מחליט למדוד את מהירות הרכב ברגע $t=10\,\text{s}$ (ראה איור 4).



איור 4: המהירות הרגעית של גוף שווה לגבול של הגודל $\Delta x / \Delta t$ כאשר $\Delta t \to 0$.

עלינו לדעת כי אקדח הלייזר משמש לקביעת מיקום הרכב ברגע מסוים על ידי אלומת לייזר הנשלחת אל הרכב ומוחזרת ממנו. האקדח מודד את הזמן t' בין רגע פליטת אלומת הלייזר ובין רגע חזרתה מהרכב. מיקום הרכב (מרחק מהמכשיר) מחושב במכשיר על ידי הקשר $x = ct'/2$ כאשר $c = 300{,}000\,\text{km/s}$ היא מהירות האור. שים לב, בגלל שמהירות האור $(3\times 10^8\,\text{m/s})$ גדולה פי מיליונים ממהירות הרכב, אלומת הלייזר נעה אל הרכב ובחזרה מבלי שהרכב יספיק למעשה לשנות את מיקומו.

נניח כעת כי השוטר הפעיל את אקדח הלייזר שמדד את מיקום הרכב x_1 בזמן $t_1 = 9\,\text{s}$ ואת מיקומו x_2 בזמן $t_2 = 11\,\text{s}$ (ראה איור 4א), ומחשב את הגודל:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{11\,\text{s} - 9\,\text{s}} = \frac{x_2 - x_1}{2\,\text{s}}$$

גודל זה שווה למהירות הממוצעת של הרכב בפרק הזמן $9 - 11\,\text{s}$. מהירות זו שונה מהגודל שאנו מעוניינים בו, שהוא המהירות הרגעית ב- $t = 10\,\text{s}$.

על מנת לקבל תוצאה קרובה יותר למהירות ברגע $t = 10\,\text{s}$, השוטר יכול למדוד את מיקום הרכב x_1 ברגע $t_1 = 9.5\,\text{s}$ ואת מיקומו x_2 ברגע $t_2 = 10.5\,\text{s}$, כפי שמתואר באיור (4ב). כעת נקבל:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{10.5\,\text{s} - 9.5\,\text{s}} = \frac{x_2 - x_1}{1\,\text{s}}$$

גודל זה המבטא את המהירות הממוצעת של הרכב בפרק הזמן $9.5 - 10.5\,\text{s}$, קרוב יותר למהירות ב- $t = 10\,\text{s}$, אבל עדיין שונה ממנה. על מנת להתקרב יותר למהירות המבוקשת, השוטר יכול למדוד את x_1 ב- $t_1 = 9.75\,\text{s}$ ואת-x_2 ב- $t_2 = 10.25\,\text{s}$ (ראה איור 4ג) ולחשב את הגודל:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{9.75\,\text{s} - 10.25\,\text{s}} = \frac{x_2 - x_1}{0.5\,\text{s}}$$

שהוא קרוב עוד יותר למהירות הרגעית המבוקשת ב- $t = 10\,\text{s}$. לפי עיקרון זה נקבל שהמהירות הרגעית נתונה על ידי הערך שאליו מתכנס הגודל $\Delta x / \Delta t$ כאשר $\Delta t \to 0$ סביב לזמן המבוקש.

הערך שאליו מתכנס הגודל $\Delta x / \Delta t$ כאשר $\Delta t \to 0$ נקרא הגבול של גודל זה. לכן:

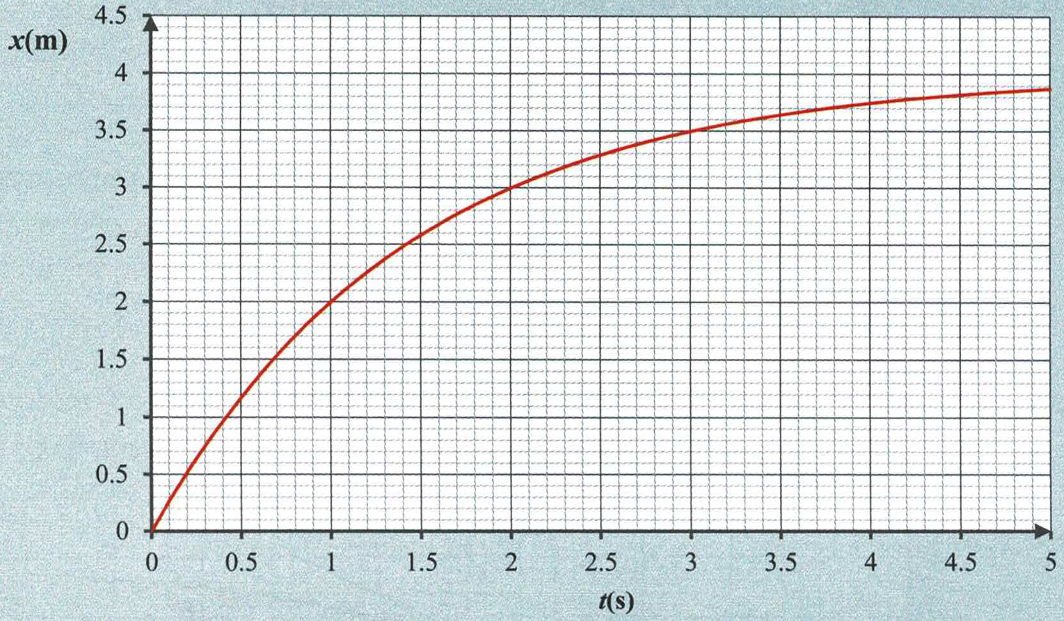
המהירות הרגעית היא הגבול של הגודל $\Delta x / \Delta t$ כאשר Δt שואף לאפס סביב לזמן המבוקש. בכתיב מתמטי מבטאים את פעולת החישוב על ידי הביטוי הבא:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right) \qquad (8)$$

לביטוי הרשום במשוואה (8) יש משמעות מתמטית הקשורה לגרף המתאר את מיקום הגוף כפונקציה של הזמן, משמעות עליה נעמוד בדוגמה הבאה:

דוגמה:

הגרף שלפניך מתאר את המיקום x כפונקציה של הזמן t עבור גוף הנע בקו ישר.



א. חשב את המהירות הממוצעת של הגוף בפרקי הזמן הבאים:
(1) $0-4\text{s}$.
(2) $1-3\text{s}$.
(3) $1.5-2.5\text{s}$.

ב. חשב את המהירות הרגעית של הגוף ב-$t = 2\text{s}$.

ג. קבע מהו הקשר בין המהירות הממוצעת של הגוף בפרקי הזמן שבסעיף א' לבין הגרף המתאר את מיקום הגוף כפונקציה של הזמן.

ד. קבע מהו הקשר בין המהירות הרגעית של הגוף ב-$t = 2\text{s}$ שחישבת בסעיף ב' לבין הגרף המתאר את מיקום הגוף כפונקציה של הזמן.

פתרון:

א. על פי ההגדרה, המהירות הממוצעת נתונה על ידי הקשר:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

(1) בפרק הזמן (0-4s) נקבל:

$$\bar{v}(0 \to 4\text{s}) = \frac{x(4\text{s}) - x(0)}{\Delta t}$$

לפי הגרף, $x(4\text{s}) = 3.75\text{m}$ ו-$x(0) = 0$. לכן נקבל:

$$\bar{v}(0 \to 4\text{s}) = \frac{3.75\text{m} - 0\text{m}}{4\text{s} - 0\text{s}} = 0.9375\,\text{m/s}$$

(2) בפרק הזמן (1-3s) נקבל:

$$\bar{v}(1\rightarrow 3\,\mathrm{s})=\frac{x(3\,\mathrm{s})-x(1)}{\Delta t}=\frac{3.5\,\mathrm{m}-2\,\mathrm{m}}{3\,\mathrm{s}-1\,\mathrm{s}}=0.75\,\mathrm{m/s}$$

(3) בפרק הזמן (1.5-2.5s) נקבל:

$$\bar{v}(1.5\rightarrow 2.5\,\mathrm{s})=\frac{x(2.5\,\mathrm{s})-x(1.5)}{\Delta t}=\frac{3.3\,\mathrm{m}-2.6\,\mathrm{m}}{2.5\,\mathrm{s}-1.5\,\mathrm{s}}=0.7\,\mathrm{m/s}$$

ב. על פי ההגדרה של המהירות הרגעית המנוסחת במשוואה (8):

$$v=\lim_{\Delta t\rightarrow 0}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)$$

על מנת לחשב את המהירות הרגעית ב- $t=2\,\mathrm{s}$, יש לחשב את הגודל $\Delta x/\Delta t$ עבור Δt הקטן ביותר האפשרי סביב ל- $t=2\,\mathrm{s}$. במגבלת הדיוק הניתן בגרף הנ"ל, Δt הקטן ביותר האפשרי סביב ל- $t=2\,\mathrm{s}$ הוא בין $t=1.9\,\mathrm{s}$ ו- $t=2.1\,\mathrm{s}$, לכן נקבל ברמת הדיוק של הגרף ש:

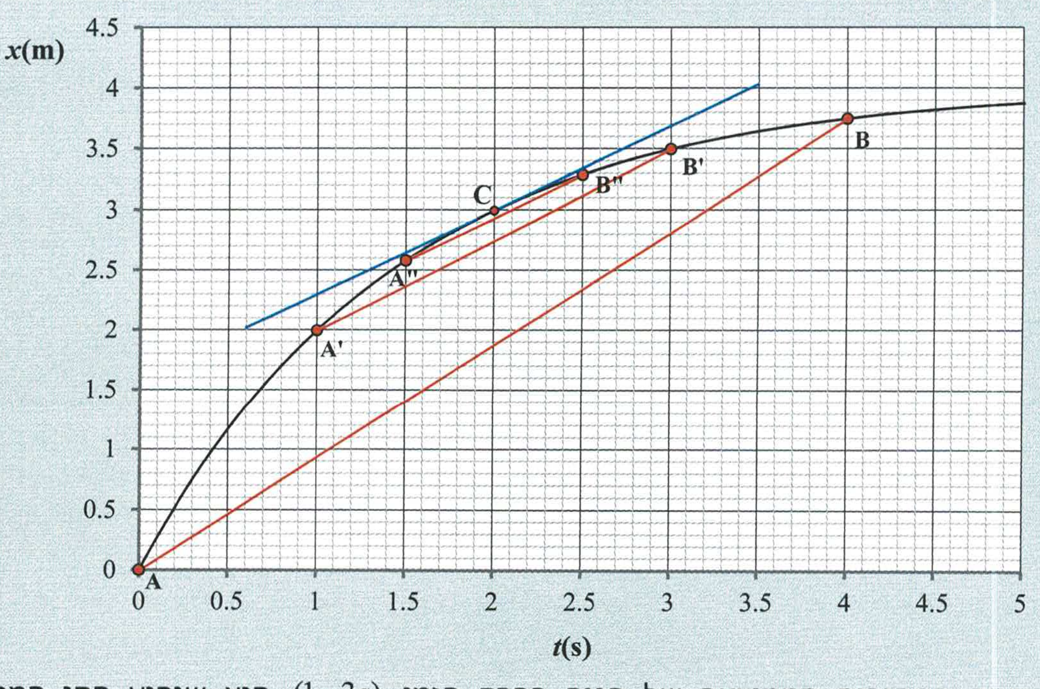
$$v(2\,\mathrm{s})\cong\frac{x(2.1\,\mathrm{s})-x(1.9\,\mathrm{s})}{2.1\,\mathrm{s}-1.9\,\mathrm{s}}=\frac{3.05\,\mathrm{m}-2.9\,\mathrm{m}}{0.2\,\mathrm{s}}=0.75\,\mathrm{m/s}$$

בנוסחה האחרונה רשמנו ($\cong$) ולא ($=$) כי השוויון מתקיים רק כאשר $\Delta t\rightarrow 0$. במגבלת הדיוק של הגרף לא ניתן לבחור ערכים של הזמן כך ש- Δt קטן מאוד עד כדי שאיפה לאפס.

ג. המהירות הממוצעת של הגוף בפרק הזמן $(0-4\,\mathrm{s})$ הנתונה על ידי:

$$\bar{v}(0\rightarrow 4\,\mathrm{s})=\frac{x(4\,\mathrm{s})-x(0)}{4\,\mathrm{s}-0\,\mathrm{s}}=\frac{3.75\,\mathrm{m}-0\,\mathrm{m}}{4\,\mathrm{s}-0\,\mathrm{s}}$$

שווה לשיפוע הקו המחבר בין הנקודות $A(0\,\mathrm{s},0\,\mathrm{m})$ ו- $B(4\,\mathrm{s},3.75\,\mathrm{m})$, כלומר שיפוע הקו AB המתואר בתרשים הבא:



באופן דומה המהירות הממוצעת של הגוף בפרק הזמן $(1-3\,\mathrm{s})$ היא שיפוע הקו המחבר בין הנקודות $A'(1\,\mathrm{s},2\,\mathrm{m})$ ו- $B'(3\,\mathrm{s},3.5\,\mathrm{m})$ המתוארות בתרשים, כלומר שיפוע הקו $A'B'$ (ראה תרשים).

המהירות הממוצעת של הגוף בפרק הזמן $(1.5-2.5\,\mathrm{s})$ היא שיפוע הקו המחבר בין הנקודות $A''(1.5\,\mathrm{s},2.6\,\mathrm{m})$ ו- $B''(2.5\,\mathrm{s},3.3\,\mathrm{m})$ המתוארות בתרשים, כלומר שיפוע הקו $A''B''$ (ראה תרשים).

ד. המהירות הרגעית של הגוף ב- $t=2\,\mathrm{s}$, שהיא הגודל $\Delta x/\Delta t$ כאשר $\Delta t\rightarrow 0$, היא שיפוע של הקו המחבר בין שתי הנקודות על הגרף השייכות לשני זמנים t_1 ו- t_2 סביב ל- $t=2\,\mathrm{s}$ כך שמקיימים $\Delta t\rightarrow 0$. בגבול $\Delta t\rightarrow 0$ מתקבל שגודל זה הוא שיפועו של המשיק של הגרף בזמן זה. לכן מתקבל

שהמהירות הרגעית ב-$t=2\text{s}$ שווה לשיפוע המשיק לגרף העובר בנקודה $C(2\text{s},3\text{m})$, כלומר שיפוע הקו המוצג בכחול בתרשים למעלה.

סיכום:

בתנועה בקו ישר מתקיימים:

1) המהירות הממוצעת של גוף בין שני זמנים t_1 ו- t_2 הוא שיפוע הקו המחבר בין שתי הנקודות על הגרף המתאר את מיקום הגוף כפונקציה של הזמן, המתאימות לזמנים t_1 ו- t_2.

2) המהירות הרגעית של גוף בזמן מסוים t היא שיפוע המשיק לגרף המתאר את מיקום הגוף כפונקציה של הזמן, בנקודה הנמצאת על הגרף המתאימה לזמן t. שיפוע המשיק נקרא גם שיפוע הגרף בנקודה זו ומהווה את ערך הנגזרת בנקודה זו של הפונקציה המתארת את הגרף.

דוגמה נוספת

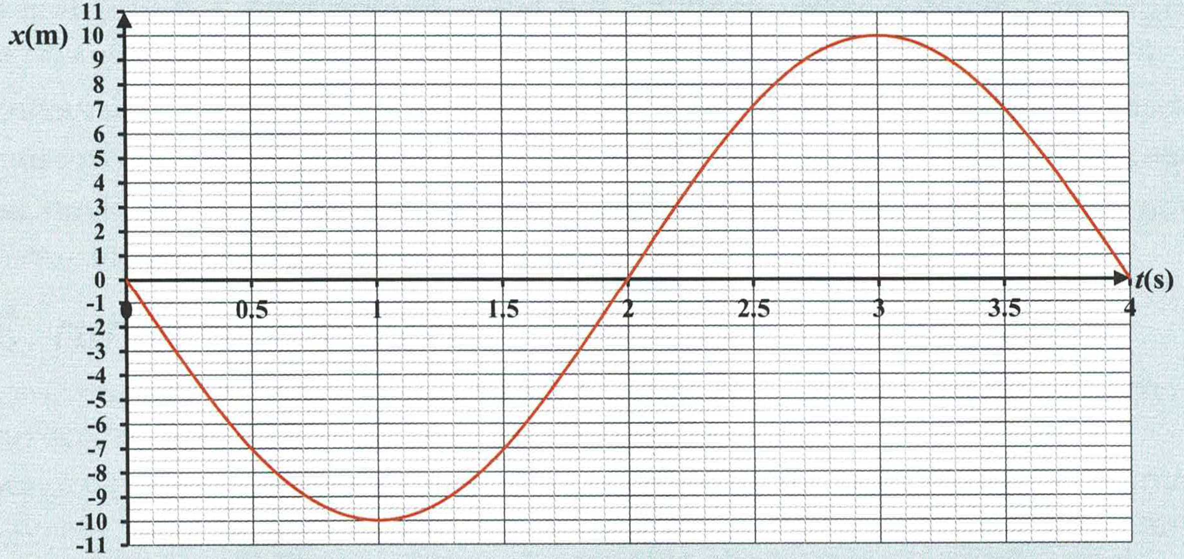
הגרף שלפניך מתאר את המיקום x כפונקציה של הזמן t עבור גוף הנע לאורך קו ישר.

א. קבע באילו פרקי זמן הגוף נע בכיוון החיובי ובאילו פרקי זמן הוא נע בכיוון השלילי. הסבר.

ב. קבע באילו זמנים מהירות הגוף מתאפסת. הסבר את תשובתך.

ג. חשב את המהירות הרגעית של הגוף בזמנים: $t=1.3\text{s}$ ו- $t=2\text{s}$.

ד. חשב את המהירות הממוצעת של הגוף בפרקי הזמן: $(1-3\text{s})$ ו- $(0-4\text{s})$.



פתרון:

א. הגוף נע בכיוון החיובי כאשר מהירותו חיובית, ומכיוון שהמהירות היא שיפוע הגרף הנתון, הגוף נע בכיוון החיובי בפרקי הזמן שבהם שיפוע הגרף הוא חיובי. על פי הגרף נקבל שהגוף נע בכיוון החיובי בפרק הזמן $1\text{s}<t<3\text{s}$. הגוף נע בכיוון השלילי בפרקי הזמן שבהם שיפוע הגרף הוא שלילי, וזה מתקיים בפרקי הזמן: $0\text{s}<t<1\text{s}$ ו- $3\text{s}<t<4\text{s}$.

ב. מהירות הגוף מתאפסת בנקודות שבהן שיפוע הגרף מתאפס, וזה מתקיים בזמנים: $t=1\text{s}$ ו- $t=3\text{s}$.

ג. המהירות הרגעית ב-$t=1.3\text{s}$ היא הגודל $\Delta x/\Delta t$ כאשר $\Delta t \to 0$ סביב לזמן $t=1.3\text{s}$. בגבולות הדיוק של הגרף הערך הקטן ביותר של Δt סביב ל-$t=1.3\text{s}$ הוא בין $t=1.2\text{s}$ ו- $t=1.4\text{s}$. לכן נקבל:

$$v(1.3\text{s})=\frac{x(1.4\text{s})-x(1.2\text{s})}{1.4\text{s}-1.2\text{s}}=\frac{-8\text{m}-(-9.5\text{m})}{0.2\text{s}}=7.5\,\text{m/s}$$

בדרך דומה נקבל:

$$v(2\,\mathrm{s})=\frac{x(2.1\,\mathrm{s})-x(1.9\,\mathrm{s})}{2.1\,\mathrm{s}-1.9\,\mathrm{s}}=\frac{1.5\,\mathrm{m}-(-1.5\,\mathrm{m})}{0.2\,\mathrm{s}}=15\,\mathrm{m/s}$$

ד. על פי ההגדרה $\bar{v}=\Delta x/\Delta t$ נקבל:

$$\bar{v}(1-3\,\mathrm{s})=\frac{x(3\,\mathrm{s})-x(1\,\mathrm{s})}{3\,\mathrm{s}-1\,\mathrm{s}}=\frac{10-(-10)}{2}=10\,\mathrm{m/s}$$

$$\bar{v}(0-4\,\mathrm{s})=\frac{x(4\,\mathrm{s})-x(0)}{4\,\mathrm{s}-0}=\frac{0-0}{4}=0$$

2.5 המהירות – גודל וכיוון

כאשר מתארים את מהירותו של גוף בחיי היום-יום, אנחנו מתייחסים לגודל המהירות בלבד ונוהגים להתעלם מכיוון התנועה. לעומת זאת, בפיזיקה אנחנו מתייחסים לכיוון כחלק אינטגראלי מהגדרת המהירות, ובתנועה בקו ישר זה מתבטא, כפי שראינו, על ידי הוספת סימן למהירות. אם הגוף מתקדם בכיוון החיובי (ביחס לציר שנקבע), מהירותו תהיה חיובית ואם הוא מתקדם בכיוון השלילי, מהירותו תהיה שלילית.

לדוגמה, אם שתי מכונית נוסעות לאורך כביש ישר בשני כיוונים מנוגדים, כך שכל אחת מהן עוברת דרך של $10\,\mathrm{m}$ בכל שנייה, בחיי יום יום נאמר שמהירות כל אחת משתי המכוניות היא $10\,\mathrm{m/s}$ (ללא קשר לכיוון התנועה). לעומת זאת, בהתייחסות פיזיקלית מהירות אחת המכוניות תהיה $+10\,\mathrm{m/s}$ ומהירות המכונית השנייה $-10\,\mathrm{m/s}$, וזאת על פי הכיוון החיובי הנבחר בבעיה.

כתוצאה מכך, מבדילים בפיזיקה בין שני מושגים; "מהירות" ו"גודל המהירות". מהירות (velocity באנגלית) היא גודל פיזיקלי המתייחס לגודל המהירות ולכיוונה (שמתבטא בסימן המהירות במקרה של תנועה בקו ישר). גודל המהירות (speed באנגלית) מתייחס ל"כמות" המהירות ללא הסימן (כלומר מבטא את המהירות בערכה המוחלט).

3. תנועה שוות-מהירות

כאשר נתון שגוף נע **במהירות קבועה**, הכוונה היא תמיד לכך שגודל המהירות וגם כיוון המהירות הם קבועים. תנועה זו נקראת גם **תנועה שוות מהירות**.

אם גודל המהירות קבוע אבל כיוונה משתנה במהלך תנועת הגוף, טעות לתאר תנועה זו כתנועה במהירות קבועה או תנועה שוות מהירות. תנועה זו נקראת **תנועה קצובה**. כלומר תנועה קצובה היא תנועה שבה גודל המהירות הוא קבוע אך לא בהכרח כיוונה קבוע.

כל תנועה במהירות קבועה היא תנועה קצובה, אבל ההפך לא בהכרח נכון. לא כל תנועה קצובה היא תנועה שוות מהירות.

3.1 תיאור תנועה במהירות קבועה (תנועה שוות מהירות)

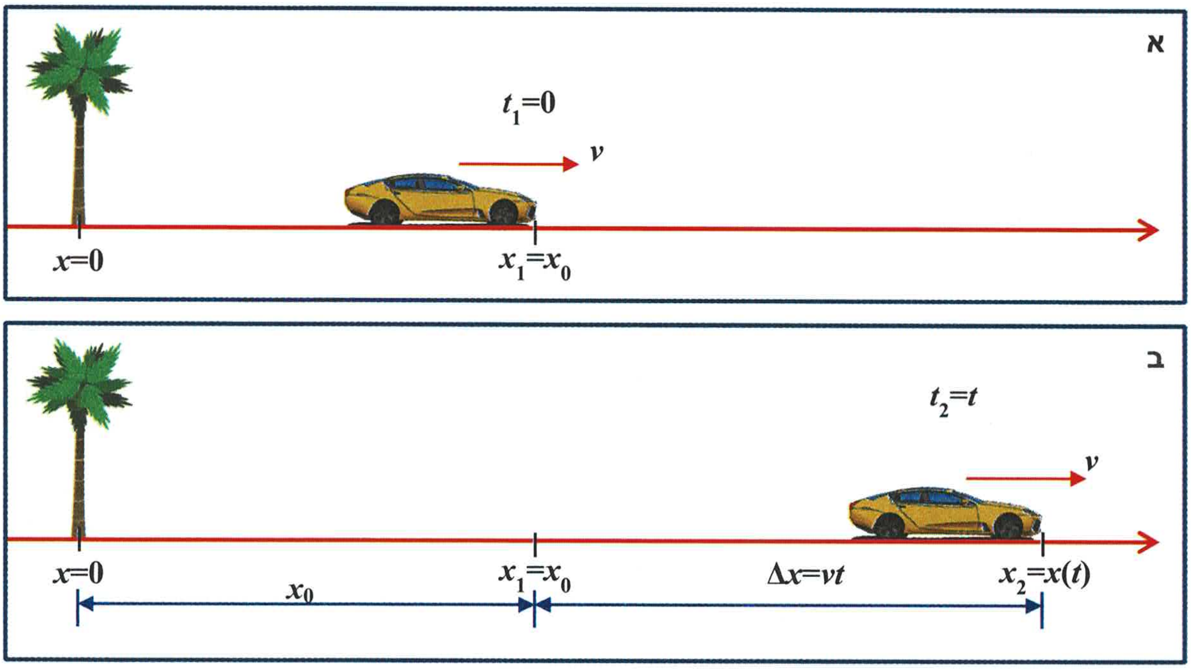
באיור (5) מתוארת מכונית הנעה לאורך כביש ישר במהירות קבועה שגודלה v. בזמן $t=0$ המכונית נמצאת במיקום x_0 (ראה תרשים 5א), ובזמן מאוחר יותר t המכונית נמצאת במיקום $x(t)$ (ראה איור 5ב).

על פי ההגדרה, מהירות המכונית נתונה על ידי:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x(t)-x_0}{t-0}=v \qquad (9)$$

מהקשר האחרון נקבל:

$$x(t)=x_0+vt \qquad (10)$$



איור 5: מכונית נוסעת במהירות קבועה בקו ישר. (א) בזמן $t=0$ המכונית נמצאת ב- x_0 (ב) בזמן מאוחר יותר, t, המכונית נמצאת במקום $x(t)$.

ביטוי זה מתאר את פונקציית מקום-זמן של גוף הנע במהירות קבועה.

יש לשים לב לכך ש:

1) הגודל vt מבטא את Δx שהוא העתק הגוף בפרק הזמן t (ראה תרשים 5ב).
2) הגודל x_0+vt מבטא את מיקום הגוף x בזמן t ביחס לראשית $(x=0)$.

בדרך כלל רושמים את הקשר (10) בצורה הבאה:

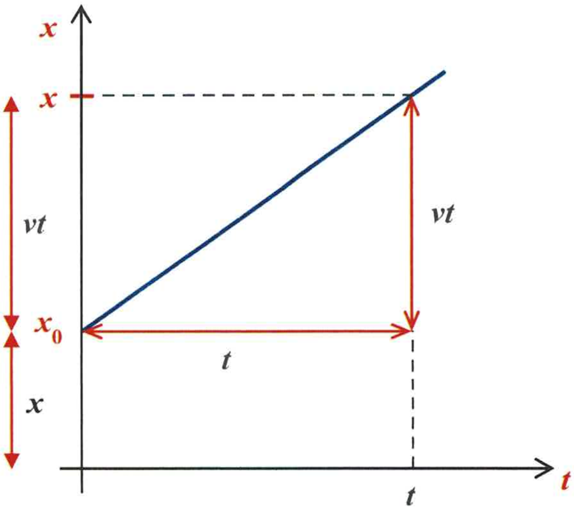
$$x=x_0+vt \tag{11}$$

3.2 גרף המיקום כפונקציה של הזמן בתנועה במהירות קבועה

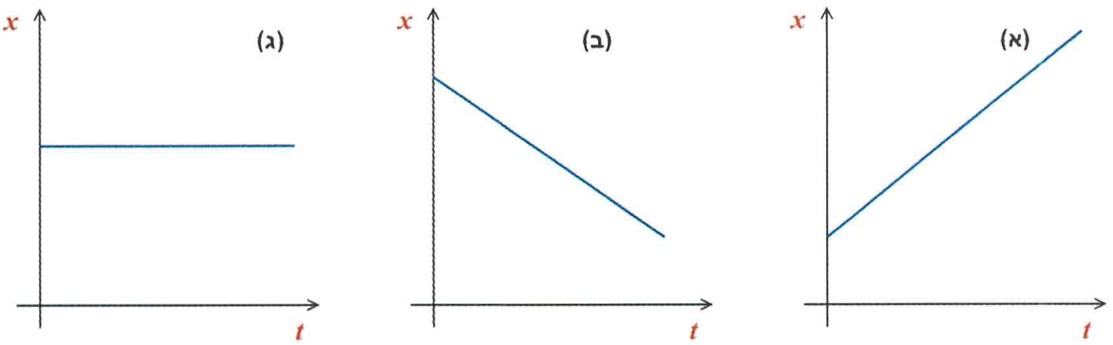
הקשר המתאר את המיקום כפונקציה של הזמן בתנועה שוות מהירות: $x=x_0+vt$ הוא פונקציה לינארית מהצורה: $y=b+ax$. כידוע, פונקציה זו מתוארת על ידי קו ישר כמתואר באיור 6.

מתקיים:

1) שיפוע הגרף מבטא את גודל מהירות הגוף (v).
2) נקודת חיתוך הגרף עם הציר האנכי (ציר המיקום) היא: $(0,x_0)$ כמתואר באיור 6, כאשר x_0 הוא מיקום הגוף בזמן $t=0$.
3) אם מהירות הגוף חיובית (כלומר הגוף נע בכיוון החיובי של הציר), שיפוע הגרף יהיה חיובי. הגרף המתאר את המיקום כפונקציה של הזמן במקרה זה הוא קו ישר עולה כפי שמתואר באיור (7א).



איור 6: גרף מתאר את המקום כפונקציה של הזמן עבור גוף הנע במהירות קבועה.

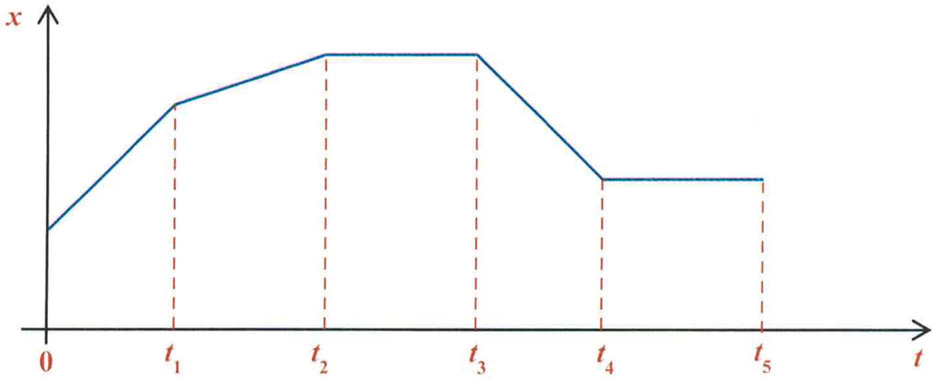


איור 7: (א) המקום כפונקציה של הזמן בתנועה במהירות קבועה חיובית. (ב) המקום כפונקציה של הזמן בתנועה במהירות קבועה שלילית. (ג) המקום כפונקציה של הזמן כאשר הגוף נמצא במנוחה.

4) אם מהירות הגוף שלילית (הגוף נע בכיוון השלילי של הציר), שיפוע הגרף יהיה שלילי. הגרף המתאר את המיקום כפונקציה של הזמן במקרה זה הוא קו ישר יורד כפי שמתואר באיור (7ב).

5) אם הגוף נמצא במנוחה $(v=0)$, שיפוע הגרף מתאפס, והגרף המתאר את המקום כפונקציה של הזמן במקרה זה הוא קו ישר אופקי, כפי שמתואר באיור (7ג).

לעתים נתקלים בתנועה שבה הגוף נע בקו ישר במהירות קבועה בפרקי זמנים שונים, אבל גודלה שונה מפרק זמן אחד לאחר. גרף המיקום כפונקציה של הזמן במקרה זה מורכב מקוים ישרים המתארים תנועות שוות מהירות, קווים אלה הם בעלי שיפועים שונים (ראה איור 8).



איור 8: תנועה במהירות קבועה בפרקי זמן שונים.

עיינו באיור 8 וענו על השאלות הבאות ונמקו תשובותיכם:

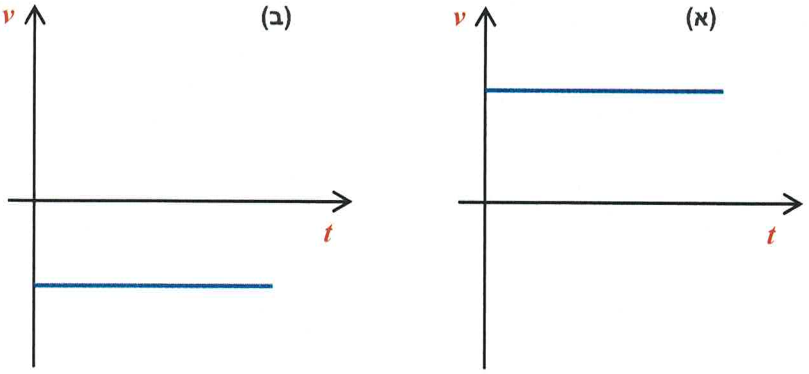
1. באילו פרקי זמן הגוף נע בכיוון החיובי?
2. באילו פרקי זמן הגוף נע בכיוון השלילי?
3. באילו פרקי זמן הגוף נמצא במנוחה?
4. באיזה משני פרקי הזמן $(0-t_1)$ או (t_1-t_2) מהירות הגוף גדולה יותר?

3.3 גרף המהירות כפונקציה של הזמן בתנועה במהירות קבועה

בתנועה במהירות קבועה גודל המהירות כמו גם הכיוון, קבוע. לכן הגרף המתאר את המהירות כפונקציה של הזמן הוא קו ישר אופקי, כפי שמתואר באיור 9.

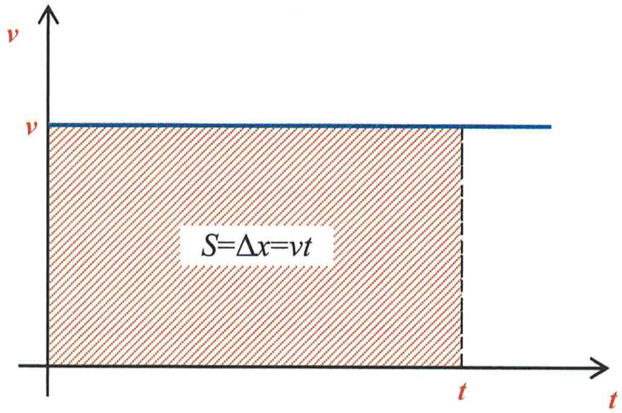
באיור 9א המהירות היא חיובית, כלומר הגוף נע בכיוון החיובי. באיור 9ב המהירות היא שלילית, כלומר הגוף נע בכיוון השלילי.

שימו לב: הערך האלגברי של השטח הכלוא בין גרף המהירות ובין ציר הזמן עד לרגע מסוים t, המתואר באיור 10, שווה לגודל המתקבל מהמכפלה vt. מצד שני מכפלה זו שווה להעתק הגוף בתנועה במשך זמן t.



איור 9: (א) גרף מהירות כפונקציה של הזמן עבור מהירות חיובית.
(ב) גרף מהירות כפונקציה של הזמן עבור מהירות שלילית.

מסקנה: השטח הכלוא בין גרף מהירות-זמן לבין ציר הזמן עד לזמן t, שווה להעתק הגוף במשך זמן זה. בהמשך נראה שתכונה זאת היא כללית ומתקיימת גם במקרה של תנועה במהירות משתנה.



איור 10: השטח הכלוא בין גרף המהירות כפונקציה של הזמן ובין ציר הזמן עד לרגע מסוים שווה בערכו המספרי להעתק של הגוף עד לרגע זה.

דוגמאות לתנועה במהירות קבועה (תנועה שוות מהירות)

דוגמה 1

גוף נע בקו ישר במהירות קבועה $v = 4\,\mathrm{m/s}$ בכיוון החיובי. נתון שבזמן $t = 0$ הגוף היה בנקודה $x = -8\,\mathrm{m}$.

א. רשום את הביטוי המתמטי המתאר את מיקום הגוף כפונקציה של הזמן.

ב. היעזר בביטוי המתמטי שכתבת בסעיף א' ומצא את מיקום הגוף בזמנים: $t = 8\,\mathrm{s}$ ו- $t = 20\,\mathrm{s}$.

ג. חשב את הזמנים שבהם הגוף עובר בנקודות: $x = 0$ ו- $x = 16\,\mathrm{m}$.

ד. מצא את הזמן שבו העתק הגוף הוא $30\,\mathrm{m}$.

ה. שרטט את הגרף המתאר את מיקום הגוף כפונקציה של הזמן בפרק הזמן מ- $t = 0$ ועד לזמן $t = 5\,\mathrm{s}$.

פתרון:

א. $x = x_0 + vt = -8 + 4t$.

ב.

$$x(8) = -8 + 4(8) = 24\,\mathrm{m}$$
$$x(20) = -8 + 4(20) = 72\,\mathrm{m}$$

ג. הגוף עובר בנקודה $x = 0$ כאשר:

$$0 = -8 + 4t$$
$$\Rightarrow t = \frac{8\,\mathrm{m}}{4\,\mathrm{m/s}} = 2\,\mathrm{s}$$

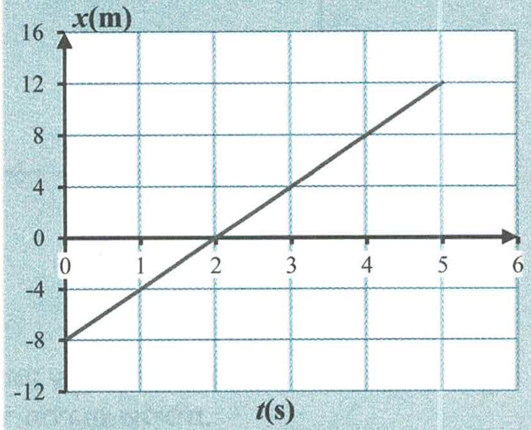
הגוף עובר בנקודה $x = 16$ כאשר:

$$16 = -8 + 4t$$
$$\Rightarrow t = \frac{16+8}{4} = 6\,\mathrm{s}$$

ד. העתק הגוף נתון על ידי:

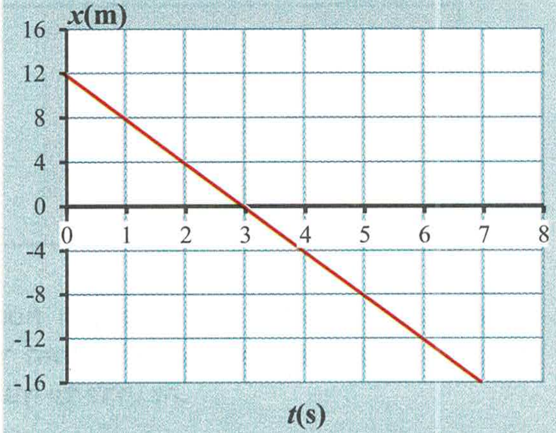
$$\Delta x = x - x_0 = vt$$
$$\Rightarrow vt = 30$$
$$\Rightarrow t = 30/4 = 7.5\,\mathrm{s}$$

ה.



דוגמה 2

הגרף שלפניך מתאר את המיקום כפונקציה של הזמן עבור גוף הנע לאורך קו ישר.



א. קבע מהו כיוון תנועת הגוף, וחשב את מהירותו.

ב. מצא את הזמן שבו הגוף עובר דרך הראשית.

ג. רשום ביטוי מתמטי המתאר את מיקום הגוף כפונקציה של הזמן.

ד. חשב את העתק הגוף ואת הדרך שעבר עד לזמן $t=5\text{s}$.

פתרון:

א. מהירות הגוף שווה לשיפוע הגרף. מכיוון ששיפוע הגרף הוא שלילי, ניתן להסיק שהגוף נע בכיוון השלילי. לחישוב מהירות הגוף נבחר שתי נקודות על הקו הישר, לדוגמה: $(0\text{s},12\text{m})$ ו-$(3\text{s},0\text{m})$ ונקבל:

$$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=\frac{0-12}{3-0}=-4\,\text{m/s}$$

ב. על פי הגרף ב-$t=3\text{s}$.

ג. $x=x_0+vt=12-4t$

ד.

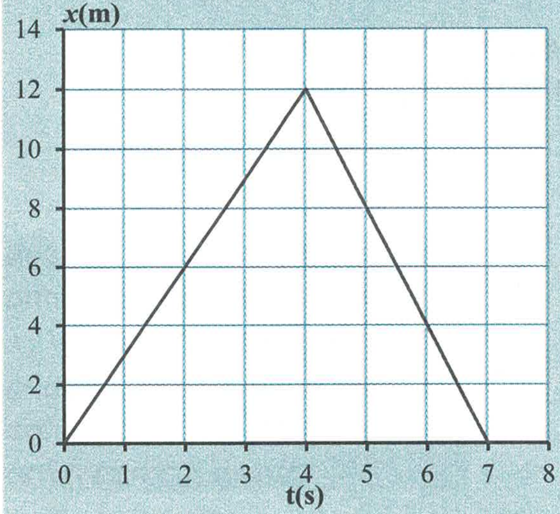
$$\Delta x=x(5)-x(0)=$$
$$=(12-4\times5)-12=-20\,\text{m}$$

הדרך שעבר הגוף עד לזמן זה היא:

$$s=|\Delta x|=20\,\text{m}$$

דוגמה 3

הגרף שלפניך מתאר את המיקום כפונקציה של הזמן עבור גוף הנע לאורך קו ישר.



א. תאר במילים את תנועת הגוף.

ב. חשב את העתק הגוף במהלך תנועתו בכיוון החיובי ואת העתקו בכיוון השלילי.

ג. חשב את ההעתק הכולל ואת הדרך שעבר הגוף במהלך הזמן המוצג בגרף.

ד. חשב את מהירויות הגוף בשלבי התנועה השונים.

ה. רשום ביטוי המתאר את מיקום הגוף כפונקציה של הזמן בפרק הזמן $0\le t\le 7\text{s}$.

פתרון:

א. בפרק הזמן מ-$t=0$ עד ל-$t=4\text{s}$ הגוף נע בכיוון החיובי במהירות קבועה, ובפרק הזמן מ-$t=4\text{s}$ עד ל-$t=7\text{s}$ הוא נע בכיוון השלילי במהירות קבועה גם כן.

ב. העתק הגוף בכיוון החיובי שנסמן אותו ב-Δx_1:

$$\Delta x_1=12-0=12\,\text{m}$$

העתק הגוף בכיוון השלילי שנסמן אותו ב-Δx_2:

$$\Delta x_2=0-12=-12\,\text{m}$$

ג. ההעתק הכולל הוא:

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 12 + (-12) = 0$$

הדרך שעבר הגוף שווה לסכום הערכים המוחלטים של ההעתקים החלקיים של הגוף:

$$s = |\Delta x_1| + |\Delta x_2| = 12 + 12 = 24\,\text{m}$$

ד. מהירות הגוף מיוצגת על ידי שיפוע הגרף. בשלב הראשון מהירות הגוף היא:

$$v_1 = \frac{12-0}{4-0} = 3\,\text{m/s}$$

בשלב השני מהירות הגוף היא:

$$v_2 = \frac{0-12}{7-4} = -4\,\text{m/s}$$

ה. מיקום הגוף כפונקציה של הזמן בשלב הראשון הוא:

$$x_1 = x_{01} + v_1 t = 0 + 3t = 3t$$

מקום הגוף כפונקציה של הזמן בשלב השני הוא:

$$x_2 = x_{02} + v_2(t-4)$$

שים לב שבשלב זה רשמנו במקום t הגודל $(t-4)$ כי שלב זה לא התחיל מ-$t=0$ אלא מ-$t=4\,\text{s}$, כאשר x_{02} הוא מיקום הגוף בתחילת השלב השני (כלומר ב-$t=4\,\text{s}$) שהוא $12\,\text{m}$, ו-v_2 היא מהירות הגוף בשלב זה של התנועה שהיא $-4\,\text{m/s}$. לכן נקבל:

$$x_2 = 12 - 4(t-4) = 28 - 4t$$

ניתן לקבל את הביטוי האחרון גם בדרך נוספת, והיא הדרך שבה מוצאים משוואת קו ישר על ידי שתי נקודות על הקו. לשם כך נבחר שתי נקודות על הקו הישר, לדוגמה: $(4\,\text{s}, 12\,\text{m})$ ו- $(7\,\text{s}, 0\,\text{m})$ ונקבל:

$$\frac{x-12}{t-4} = \frac{12-0}{4-7} = -4 \qquad \Rightarrow x = 28-4t$$

לכן נקבל שמיקום הגוף כפונקציה של הזמן בפרק הזמן $0 \le t \le 7\,\text{s}$ נתון על ידי:

$$x = \begin{cases} 3t & 0 \le t < 4\,\text{s} \\ 28-4t & 4 \le t \le 7\,\text{s} \end{cases}$$

דוגמה 4

אופנוע נע לאורך כביש ישר במהירות קבועה של $15\,\text{m/s}$. בזמן $t=0$ עובר האופנוע בנקודה שנבחרה כראשית הציר ($x=0$). לאחר חצי דקה, חולפת באותה נקודה ובאותו כיוון מכונית הנעה במהירות קבועה של $20\,\text{m/s}$.

א. בחר את הכיוון החיובי של ציר התנועה (ציר x) בכיוון תנועת האופנוע, ובטא את מיקום האופנוע ואת מיקום המכונית כפונקציה של הזמן.

ב. חשב את הזמן שבו הרכב חולף על פני האופנוע ואת מיקומו בזמן זה.

ג. שרטט, באותה מערכת צירים, גרפים המתארים את מיקום האופנוע ואת מיקום המכונית כפונקציה של הזמן. התייחס לפרק הזמן מ-$t=0$ ועד ל-$t=3\,\text{min}$.

פתרון

א. נסמן את האופנוע ב-1 ואת המכונית ב-2 ונקבל:

$$x_1 = x_{01} + v_1 t = 0 + 15t = 15t$$

$$x_2 = x_{02} + v_2(t-30) =$$

$$= 0 + 20(t-30) = 20(t-30)$$

ב. המכונית חולפת על פני האופנוע כאשר מתקיים $x_2 = x_1$:

$$\Rightarrow 20(t-30) = 15t$$

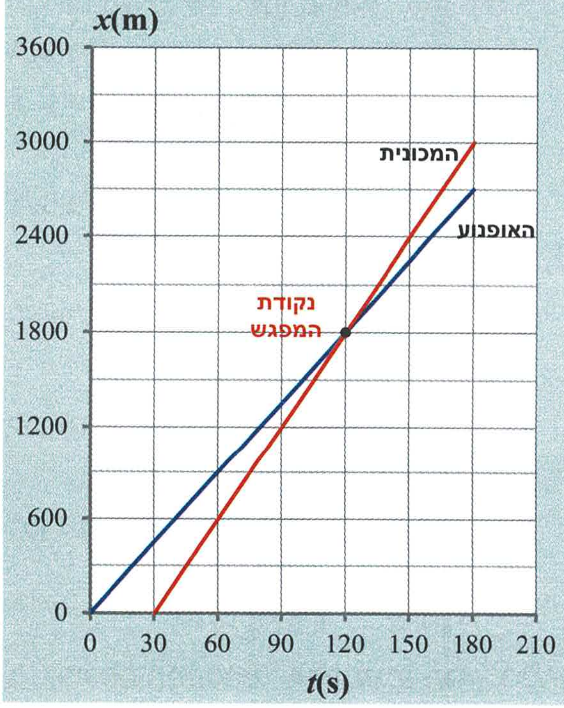
$$\Rightarrow t - 30 = 0.75t$$

$$\Rightarrow 0.25t = 30 \quad \Rightarrow t = 120\,\text{s}$$

נקודת המפגש היא:

$$x_1(120\,\text{s}) = x_2(120\,\text{s}) = 15(120) = 1{,}800\,\text{m}$$

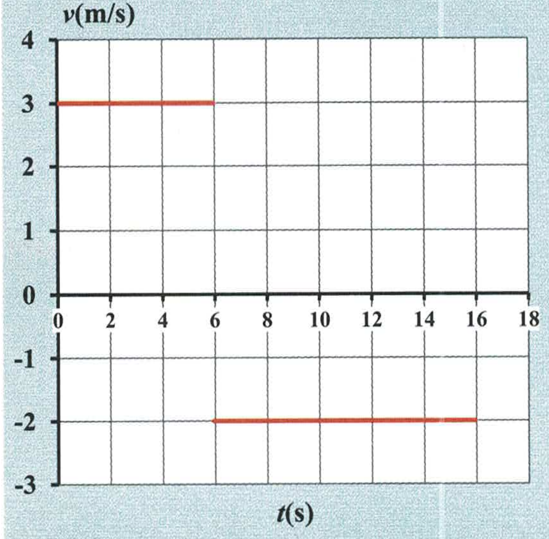
ג.



דוגמה 5

הגרף שלפניך מתאר את המהירות כפונקציה של הזמן עבור גוף הנע לאורך קו ישר.

נתון שבזמן $t=0$ הגוף היה בנקודה $x_0 = 2\,\text{m}$.



א. רשום את הביטוי המתמטי המתאר את מיקום הגוף כפונקציה של הזמן מ-$t=0$ ועד $t=16\,\text{s}$.

ב. מצא את המרחק המקסימלי אליו מגיע הגוף בכיוון החיובי.

ג. מצא את הזמן שבו הגוף עובר בנקודה $x=0$.

ד. שרטט גרף המתאר את מיקום הגוף כפונקציה של הזמן מ-$t=0$ ועד $t=16\,\text{s}$.

פתרון

א. בשלב הראשון $(0-6\,\text{s})$:

$$x_1 = x_{01} + v_1 t = 2 + 3t$$

בשלב השני $(6-16\,\text{s})$:

$$x_2 = x_{02} + v_2(t-6)$$

כאשר $v_2 = -2\,\text{m/s}$ ו:

$$x_{02} = x_1(6\,\text{s}) = 2 + 3(6) = 20\,\text{m}$$

לכן נקבל:

$$x_2 = 20 + (-2)(t-6) = 32 - 2t$$

לכן נקבל:

$$x(t) = \begin{cases} 2+3t & 0 \le t < 6\,\text{s} \\ 32-2t & 6 \le t \le 16\,\text{s} \end{cases}$$

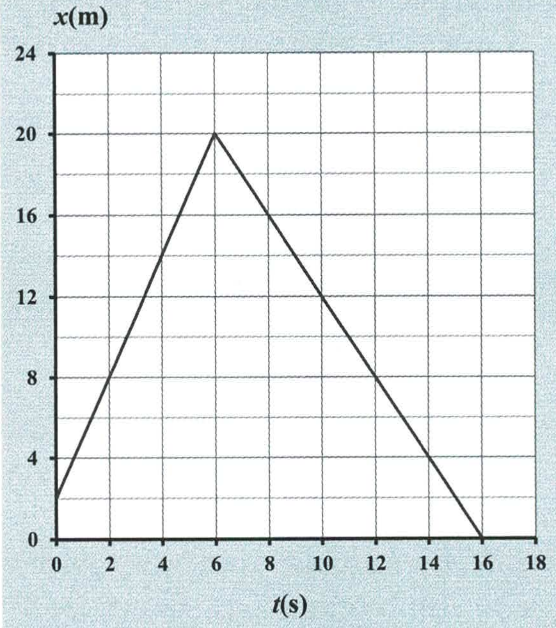
ב. המרחק המקסימלי אליו מגיע הגוף בכיוון החיובי הוא ב-$t = 6\,\text{s}$:

$$x_{\max} = x_1(6\,\text{s}) = 2 + 3(6) = 20\,\text{m}$$

ג. צריך להתקיים $x=0$, וזה קורה כאשר:

$$32 - 2t = 0 \quad \Rightarrow t = 16\,\text{s}$$

ד.



4. תאוצה

4.1 הגדרת התאוצה

רוב התנועות בהן אנחנו נתקלים הן תנועות במהירות משתנה. ביום-יום מקובל להשתמש בביטויים "גוף מאיץ או גוף נע בתאוצה" על מנת לתאר גוף המגביר את מהירותו, ו"גוף מאט או גוף נע בתאוטה" על מנת לתאר גוף המקטין את מהירותו.

נגדיר כאן את התאוצה כגודל פיזיקלי. לשם כך נתחיל בשתי הטבלאות שלפניך המתארות את המהירות כפונקציה של הזמן עבור שני גופים הנעים בקו ישר. הטבלה הראשונה מתארת את המהירות כפונקציה של הזמן עבור גוף A והטבלה השנייה מתארת את המהירות כפונקציה של הזמן עבור גוף B.

גוף A	
זמן (s)	מהירות (m/s)
0	2
1	4
2	6
3	8
4	10
5	12

גוף B	
זמן (s)	מהירות (m/s)
0	15
1	12
2	9
3	6
4	3
5	0

רואים שעבור הגוף A המהירות משתנה בקצב קבוע של $2\,\mathrm{m/s}$ בכל שנייה. לעומת זאת, עבור הגוף B המהירות משתנה בקצב קבוע של $-3\,\mathrm{m/s}$ בכל שנייה.

התאוצה מוגדרת כגודל פיזיקלי המתאר את קצב השינוי במהירות הגוף. גודל זה מסומן באות a מהמילה הלועזית acceleration.

מכיוון שעל פי הטבלה הראשונה מהירות הגוף A משתנה בשיעור של $2\,\mathrm{m/s}$ בכל שנייה, נרשום שתאוצת הגוף A היא $a_A = \frac{2\,\mathrm{m/s}}{\mathrm{s}}$, ומכיוון שעל פי הטבלה השנייה מהירות הגוף B משתנה בשיעור של $-3\,\mathrm{m/s}$ בכל שנייה, נרשום שתאוצת הגוף B היא $a_B = \frac{-3\,\mathrm{m/s}}{\mathrm{s}}$.

על פי ההסבר הקודם, אם גוף נע בקו ישר במהירות המשתנה בקצב **קבוע**, ואם מהירות הגוף בזמן מסוים t_1, היא v_1, ובזמן מאוחר יותר t_2, מהירותו v_2, תאוצת הגוף בפרק זמן זה (קצב שינוי מהירות הגוף) נתונה על ידי:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \qquad (12)$$

הערות:

1. אם מהירות הגוף משתנה בקצב קבוע, תאוצת הגוף תהיה קבועה, והביטוי (12) נותן את תאוצת הגוף הקבועה (סימן וגודל).
2. אם מהירות הגוף משתנה בקצב לא קבוע, ביטוי (12) נותן את הערך הממוצע של התאוצה $\bar{a}$.
3. אם התאוצה לא קבועה, התאוצה הרגעית, כלומר התאוצה בזמן מסוים t של התנועה, ניתנת לחישוב על ידי הגודל $\Delta v / \Delta t$ כאשר $\Delta t \to 0$ סביב הזמן t, כלומר על ידי הנגזרת של פונקציית "מהירת-זמן" של התנועה:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(\frac{\Delta v}{\Delta t}\right) \qquad (13)$$

4. ממשוואה (12) נקבל שיחידת התאוצה בשיטת היחידות (SI) היא $(\mathrm{m/s})/\mathrm{s}$. נהוג לרשום

יחידה זו באופן הבא:

$$[a]=\frac{\mathrm{m/s}}{\mathrm{s}}=\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} \qquad (14)$$

נחזור ונדגיש: אם נתון שתאוצת גוף היא $a=+2\,\mathrm{m/s^2}$ המשמעות היא שקצב שינוי המהירות הוא $(2\,\mathrm{m/s})/\mathrm{s}$, כלומר המהירות גדלה בשיעור $2\,\mathrm{m/s}$ בכל שנייה. וכן, אם נתון שתאוצת גוף היא $a=-2\,\mathrm{m/s^2}$ המשמעות היא שקצב שינוי המהירות הוא $(-2\,\mathrm{m/s})/\mathrm{s}$, כלומר המהירות קטנה בשיעור $2\,\mathrm{m/s}$ בכל שנייה.

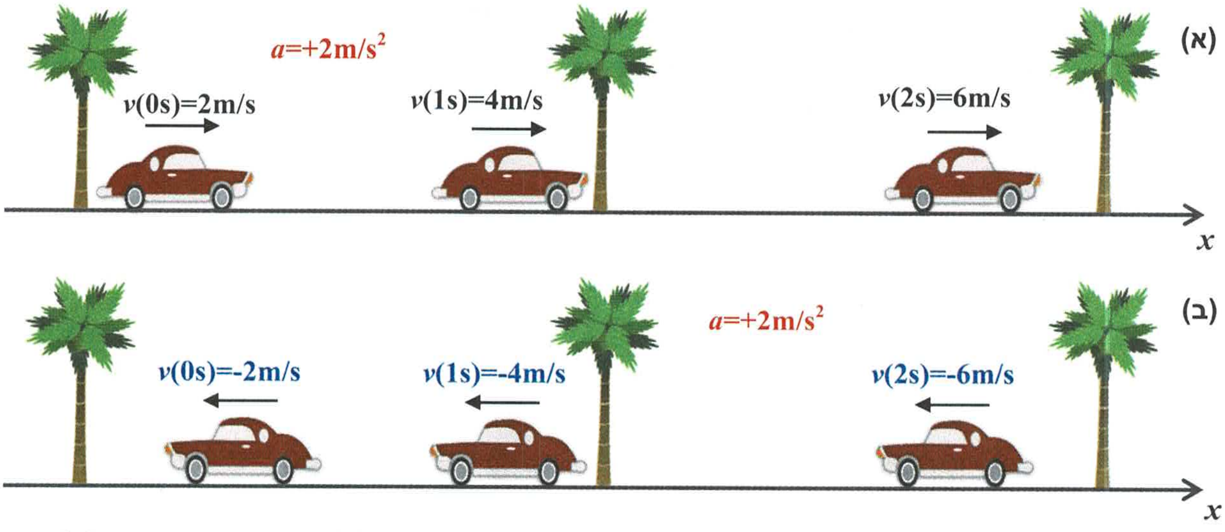
4.2 סימן התאוצה

נניח שלאורך כביש ישר נעות שתי מכוניות 1 ו-2. במכונית 1 הנהג לוחץ על דוושת הדלק כך שגודל מהירות מכונית זו גדל עם הזמן, ובמכונית 2 הנהג לוחץ על דוושת הבלם כך שגודל המהירות של המכונית קטן עם הזמן. אם נחשב את תאוצת כל אחת משתי המכוניות בהתחשבות בגודל המהירות בלבד ללא הכיוון (ללא הסימן), גודל שכאמור נקרא באנגלית speed, נקבל שתאוצת המכוניות 1 חיובית ושתאוצת המכונית 2 שלילית - ללא תלות בכיוון תנועת המכוניות. במקרה זה תאוצה חיובית מתארת גוף שגודל מהירותו גדל עם הזמן (הגוף מאיץ), ותאוצה שלילית מתארת גוף שגודל מהירותו קטן עם הזמן (הגוף מאט).

לא כך המצב אם לוקחים בחשבון את כיוון המהירות (הסימן שלה בתנועה בקו ישר). במקרה זה, תאוצה חיובית יכולה לתאר גוף מאיץ או מאט וגם תאוצה שלילית יכולה לתאר גוף מאיץ או מאט, וזאת בהתאם לשינוי בגודל המהירות בהתאם לכיוון החיובי שנבחר בבעיה. נסביר את המשמעות:

א. תאוצה חיובית:

נעיין באיורים 11א ו-11ב. בשני האיורים מוצגות מהירויות של שני רכבים בזמנים עוקבים בהפרש של שנייה אחת. הרכב באיור 11א' מאיץ בכיוון החיובי של הציר (כי גודל מהירותו גדל), והרכב באיור 11ב' מאט בכיוון השלילי (כי גודל מהירותו קטן). אם נחשב את תאוצת הרכבים בשני המקרים כולל סימן המהירות בהתאם לכיוון החיובי שנבחר בבעיה זו (בכיוון ימין) נקבל שהיא חיובית וגודלה $+2\,\mathrm{m/s^2}$ (נא לבדוק). התאוצה חיובית בשני המקרים כי בשני מקרים אלה המהירות (כולל הסימן) גדלה עם הזמן. על פי ההסבר הקודם ניתן להסיק שתאוצת גוף היא חיובית בשני מקרים:



איור 11: מהירות הרכב (כולל הסימן) גדלה: (א) הרכב נע בכיוון החיובי. (ב) הרכב נע בכיוון השלילי.

א. כאשר הגוף נע בכיוון החיובי ומאיץ בכיוון זה (מגדיל את גודל מהירותו בכיוון החיובי). במקרה זה $v>0$ ו-$a>0$.

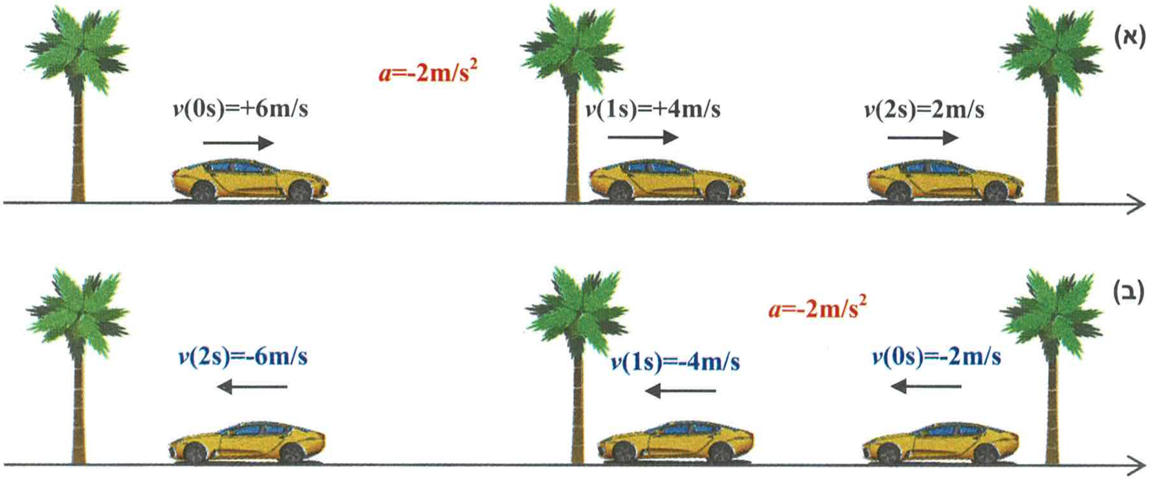
ב. כאשר הגוף נע בכיוון השלילי ומאט בכיוון זה (מקטין את גודל מהירותו בכיוון השלילי).
במקרה זה $v<0$ ו-$a>0$.

ב. תאוצה שלילית:

נעיין באיורים 12א ו-12ב. בשני האיורים מוצגות מהירויות שני רכבים בזמנים עוקבים בהפרש של שנייה אחת. הרכב באיור 12א מאט בכיוון החיובי של הציר (כי גודל מהירותו קטן בכיוון זה), והרכב באיור 12ב מאיץ בכיוון השלילי (כי גודל מהירותו גדל בכיוון זה). אם נחשב את תאוצת הרכבים בשני המקרים כולל סימן המהירות נקבל שהיא שלילית וגודלה $-2\,m/s^2$ (נא לבדוק). התאוצה שלילית בשני המקרים כי בשני מקרים אלה המהירות (כולל הסימן) קטנה עם הזמן. על פי הסבר זה ניתן להסיק שתאוצת הגוף היא שלילית בשני מקרים:

א. כאשר הגוף נע בכיוון החיובי ומאט בכיוון זה (מקטין את גודל מהירותו בכיוון החיובי).
במקרה זה $v>0$ ו-$a<0$.

ב. כאשר הגוף נע בכיוון השלילי ומאיץ בכיוון זה (מגדיל את גודל מהירותו בכיוון השלילי).
במקרה זה $v<0$ ו-$a<0$.



איור 12: מהירות הרכב קטנה: (א) הרכב נע בתאוטה בכיוון החיובי. (ב) הרכב נע בתאוצה בכיוון השלילי.

רואים אם ל-v ו-a יש סימנים זהים כלומר שניהם חיוביים או שניהם שליליים אז הגוף מאיץ (מגדיל את גודל מהירותו), ואם ל-v ו-a יש סימנים הפוכים אז הגוף מאט (מקטין את גודל מהירותו).

דוגמאות

דוגמה 1

גוף נע בקו ישר בכיוון החיובי. בזמן מסוים מהירותו $5\,m/s$. כעבור 4 שניות מהירותו גדלה ל-$17\,m/s$.

א. חשב את תאוצת הגוף בהנחה שהיא קבועה.

ב. מהי משמעות התשובה שקבלת בסעיף הקודם?

פתרון:

א. $a=\dfrac{\Delta v}{\Delta t}=\dfrac{17\,m/s-5\,m/s}{4\,s}=3\,m/s^2$.

ב. מכיון שמהירות הגוף חיובית וגם תאוצתו חיובית נקבל שבמקרה זה הגוף מאיץ בכיוון החיובי כך שהוא מגדיל את גודל מהירותו בכיוון זה בשיעור $3\,m/s$ בכל שנייה.

דוגמה 2

גוף נע בקו ישר בכיוון השלילי של הציר. בזמן מסוים מהירותו הייתה $-6\,m/s$, וכעבור 5 שניות מהירותו הייתה $-31\,m/s$.

א. חשב את תאוצת הגוף בהנחה שהיא קבועה.

ב. מהי משמעות התשובה שהתקבלה בסעיף הקודם?

פתרון:

א.

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{(-31\,\mathrm{m/s})-(-6\,\mathrm{m/s})}{5\,\mathrm{s}}=-5\,\mathrm{m/s^2}$$

ב. מכיוון שמהירות הגוף שלילית וגם תאוצתו שלילית נקבל שבמקרה זה הגוף מאיץ בכיוון השלילי כך שהוא מגדיל את גודל מהירותו בכיוון זה בשיעור $5\,\mathrm{m/s}$ בכל שנייה.

דוגמה 3

גוף נע בכיוון השלילי של ציר התנועה. ברגע מסוים מהירותו הייתה $-12\,\mathrm{m/s}$, וכעבור 5 שניות מהירותו הייתה $-2\,\mathrm{m/s}$.

ג. חשב את תאוצת הגוף בהנחה שהיא קבועה.

ד. מהי משמעות התשובה שהתקבלה בסעיף הקודם?

פתרון:

א.

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{(-2\,\mathrm{m/s})-(-12\,\mathrm{m/s})}{5\,\mathrm{s}}=+2\,\mathrm{m/s^2}$$

ב. מכיוון שמהירות הגוף שלילית ותאוצתו חיובית נקבל שבמקרה זה הגוף מאט בכיוון השלילי כך שהוא מקטין את גודל מהירותו בכיוון זה בשיעור $2\,\mathrm{m/s}$ בכל שנייה.

דוגמה 4

גוף נע לאורך קו ישר בתאוצה קבועה של $4\,\mathrm{m/s^2}$. האם ניתן לקבוע את כיוון תנועת הגוף? הסבר תשובתך.

פתרון: לא ניתן לקבוע את כיוון תנועת הגוף. הגוף יכול להיות בתנועה בכיוון החיובי כך שהוא מגדיל את גודל מהירותו בכיוון זה בשיעור $4\,\mathrm{m/s}$ בכל שנייה (מאיץ בכיוון החיובי), או יכול להיות בתנועה בכיוון השלילי כך שהוא מקטין את גודל מהירותו בכיוון זה בשיעור $4\,\mathrm{m/s}$ בכל שנייה (מאט בכיוון השלילי).

5. המהירות בתנועה בקו ישר ובתאוצה קבועה

5.1 המהירות כפונקציה של הזמן בתנועה בקו ישר ובתאוצה קבועה

באיור 13 מתואר אופנוע הנע בקו ישר בתאוצה קבועה a. נתון שבזמן מסוים, $t=0$, מהירותו היא v_0. נבטא את מהירות האופנוע בזמן t הגדול מאפס, באמצעות תאוצתו a ומהירותו ההתחלתית v_0 (המהירות בזמן $t=0$). לשם כך נשתמש בהגדרת התאוצה:

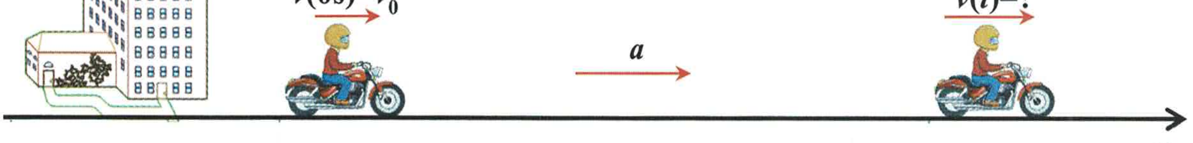
$$a=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1} \tag{15}$$

כאשר: $t_1=0$, $t_2=t$, $v_1=v_0$ ו- $v_2=v(t)$. נציב בקשר האחרון ונקבל:

$$a=\frac{v(t)-v_0}{t-0}$$

מקשר זה נקבל:

$$v(t)=v_0+at \tag{16}$$



איור 13: אופנוע נע בקו ישר בתאוצה קבועה a. ברגע $t=0$ מהירותו v_0.

קשר זה מתאר את המהירות v כפונקציה של הזמן t עבור גוף הנע לאורך קו ישר בתאוצה קבועה

a ומהירותו בזמן $t=0$ היא v_0. שימו לב שהגודל at מבטא את השינוי במהירות, Δv. לכן הגודל $v_0+at=v_0+\Delta v$ מבטא את המהירות הסופית של הגוף. לנוחות רושמים את הקשר (16) בצורה הבאה:

$$v=v_0+at \qquad (17)$$

דוגמה

רכב נע במהירות קבוע של $6\,\text{m/s}$ לאורך כביש ישר בכיוון שנבחר להיות הכיוון החיובי של הציר (ציר x). ברגע $t=0$ הוא מתחיל להאיץ בתאוצה קבועה של $3\,\text{m/s}^2$ למשך 8s. ב- $t=8\text{s}$ הרכב מתחיל להאט כך שהוא נע בתאוצה קבועה של $-2\,\text{m/s}^2$ עד לעצירתו.

א. בטא את מהירות הרכב כפונקציה של הזמן בפרק הזמן $0\le t\le 8\text{s}$.

ב. חשב את מהירות הרכב ב- $t=8\text{s}$.

ג. בטא את מהירות הרכב כפונקציה של הזמן לאחר $t=8\text{s}$.

ד. מצא את הזמן בו נעצר הרכב יחסית ל- $t=0$.

פתרון

א. $v_1=v_{01}+a_1t=6+3t$.

ב. $v(8)=6+3(8)=30\,\text{m/s}$.

ג. כעת: $v_2=v_{02}+a_2t'$ כאשר $t'=t-8$ הוא הזמן יחסית ל- $t=8\text{s}$, ו- $v_{02}=30\,\text{m/s}$ היא המהירות בסוף השלב הראשון. לכן נקבל:

$$v_2=30+(-2)(t-8)=46-2t$$

ד. הרכב נעצר כאשר $v_2=0$, וזה מתקיים כאשר:

$$v_2=46-2t=0 \Rightarrow t=23\text{s}$$

כלומר הרכב נעצר בזמן $t=23\text{s}$.

5.2 הגרף המתאר את המהירות כפונקציה של הזמן בתנועה בקו ישר ובתאוצה קבועה

המהירות כפונקציה של הזמן עבור גוף הנע לאורך קו ישר בתאוצה קבועה a נתונה על ידי הקשר:

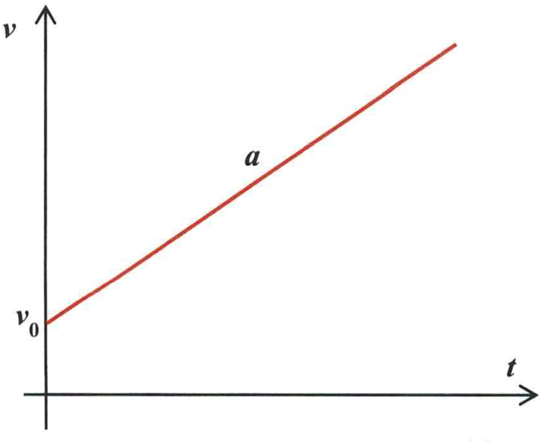
$$v=v_0+at \qquad (18)$$

כאשר v_0 היא מהירות הגוף בזמן $t=0$. זוהי פונקציה לינארית מהצורה $y=b+ax$. לכן מקבלים:

1) הגרף המתאר את המהירות כפונקציה של הזמן בתנועה בקו ישר בתאוצה קבועה הוא קו ישר כפי שמתואר באיור 14.

2) שיפוע הגרף מבטא את תאוצת הגוף, a.

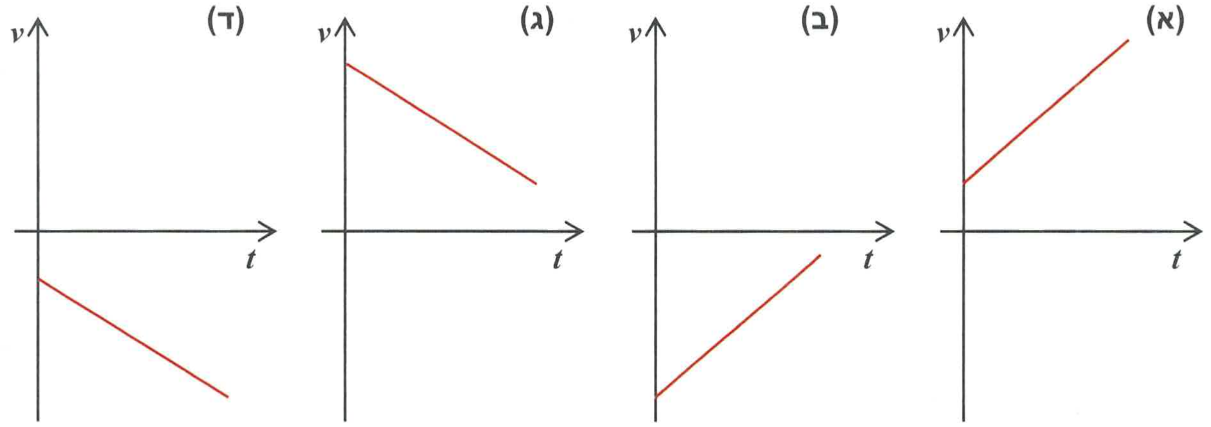
3) חיתוך הגרף עם הציר האנכי (ציר המהירות) מבטא את מהירות הגוף בזמן $t=0$, כלומר v_0.



איור 14: גרף המתאר את המהירות כפונקציה של הזמן עבור גוף הנע בתאוצה קבועה.

עבור הגרף המתאר את המהירות כפונקציה של הזמן בתנועה לאורך קו ישר ובתאוצה קבועה

קיימים 4 מקרים שונים המתוארים באיור 15.



איור 15: מקרים שונים עבור הגרף של המהירות בתלות בזמן עבור תנועה בתאוצה קבועה.

הסבר:

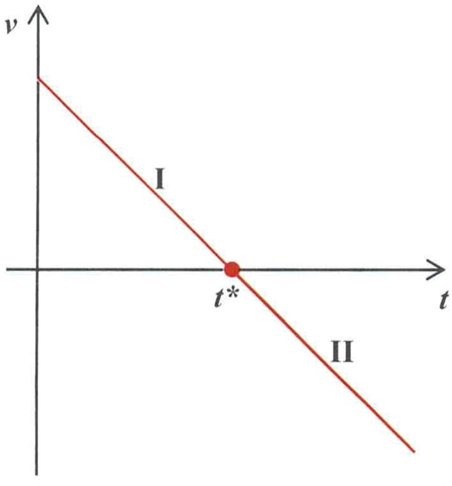
מקרה א: המהירות חיובית $(v>0)$ ותאוצת הגוף חיובית $(a>0)$. גרף זה מתאר את המהירות של גוף הנע בכיוון החיובי בתאוצה חיובית וקבועה. במקרה זה הגוף מתקדם בכיוון החיובי תוך כדי הגדלת גודל מהירותו (מאיץ בכיוון החיובי).

מקרה ב: המהירות שלילית $(v<0)$ ותאוצת הגוף חיובית $(a>0)$. גרף זה מתאר את המהירות של גוף הנע בכיוון השלילי בתאוצה חיובית וקבועה. במקרה זה הגוף מתקדם בכיוון השלילי תוך כדי הקטנת גודל מהירותו (מאט בכיוון השלילי).

מקרה ג: המהירות חיובית $(v>0)$ ותאוצת הגוף שלילית $(a<0)$. גרף זה מתאר את המהירות של גוף הנע בכיוון החיובי בתאוצה שלילית וקבועה. במקרה זה הגוף מתקדם בכיוון החיובי תוך כדי הקטנת גודל מהירותו (מאט בכיוון החיובי).

מקרה ד: המהירות שלילית $(v<0)$ ותאוצת הגוף שלילית $(a<0)$. גרף זה מתאר גוף הנע בכיוון השלילי בתאוצה שלילית וקבועה. במקרה זה הגוף מתקדם בכיוון השלילי תוך כדי הגדלת גודל מהירותו (מאיץ בכיוון השלילי).

לפעמים אותו גרף מכיל שני מקרים שונים, לדוגמה הגרף המתואר באיור 16. בשלב (I) בגרף מתקיים $v>0$ ו-$a<0$. בשלב זה של התנועה הגוף מתקדם בכיוון החיובי תוך כדי הקטנת מהירותו (מאט בכיוון החיובי) עד לעצירה הרגעית ב-t^*. בשלב (II) של הגרף מתקיים $v<0$ ו-$a<0$, לכן בשלב זה הגוף מאיץ בכיוון השלילי. נראה בפרק הבא שהגרף המתואר באיור 16 מתאים למהירות גוף אשר נזרק אנכית כלפי מעלה, כאשר הכיוון החיובי נבחר כלפי מעלה.



איור 16: גרף מתאר גוף הנע בתאוטה בכיוון החיובי, נעצר רגעית ב- t^* ומיד חוזר בתאוצה בכיוון השלילי.

5.3 המהירות הממוצעת בתנועה בקו ישר ובתאוצה קבועה

בתנועה בתאוצה קבועה, המהירות משתנה (גדלה או קטנה) בקצב קבוע. לכן בפרקי זמן שווים המהירות בתנועה בתאוצה קבועה מהווה סדרה חשבונית. לדוגמה, אם המהירות ההתחלתית של גוף מסוים היא $v_0 = 3\,\mathrm{m/s}$ ותאוצתו היא $4\,\mathrm{m/s^2}$, אז מהירותו בפרקי זמן שווים (לדוגמה, שנייה כל אחד) נתונות על ידי הסדרה:

$$3\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},\ 7\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},\ 11\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},\ 15\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},\ 19\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},\ 23\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},\ 27\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}},\ \cdots$$

סידרה כזו, שבה ההפרש בין כל שני איברים עוקבים הוא קבוע, נקראת **סדרה חשבונית**. ידוע שהממוצע של סדרה חשבונית הוא הממוצע החשבוני של האיבר הראשון ושל האיבר האחרון בסדרה, כלומר מחצית סכום האיברים הראשון והאחרון. מכאן שהממוצע של המהירויות המופיעות בסדרה למעלה הוא:

$$\bar{v} = \frac{3+27}{2} = 15\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

ניתן לבדוק שמספר זה שווה לסכום איברי הסדרה מחולק במספרם:

$$\bar{v} = \frac{3+7+11+15+19+23+27}{7} = 15\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$$

באופן כללי, אם מהירות גוף אשר נע בקו ישר ובתאוצה קבועה היא v_0 בזמן $t=0$, ולאחר זמן t מהירותו v, אז המהירות הממוצעת של הגוף בפרק זמן זה נתונה על ידי:

$$\bar{v} = \frac{v_0 + v}{2} \qquad (19)$$

מביטוי זה ניתן לקבל ביטוי נוסף למהירות הממוצעת בתנועה בקו ישר ובתאוצה קבועה, וזאת על ידי הצבת $v = v_0 + at$ בביטוי האחרון:

$$\bar{v} = \frac{v_0 + (v_0 + at)}{2} = v_0 + \tfrac{1}{2}at \qquad (20)$$

לביטוי האחרון במשוואה (20) יש משמעות פיזיקלית. על מנת להבהיר מהי המשמעות הפיזיקלית של ביטוי זה נרשום אותו בצורה: $\bar{v} = v_0 + a(\tfrac{1}{2}t)$. הגודל $v_0 + a(\tfrac{1}{2}t)$ מבטא את המהירות הרגעית של הגוף בזמן $t/2$ (כלומר במחצית הזמן). מכאן ניתן לקבוע ש:

המהירות הממוצעת של גוף הנע בתאוצה קבועה בפרק זמן מסוים שווה למהירות הרגעית שלו במחצית פרק הזמן.

דוגמאות

דוגמה 1

רכב מתחיל לנוע ממנוחה ונוסע בקו ישר ובתאוצה קבועה של $2\,\mathrm{m/s^2}$.

א. חשב את מהירות הרכב לאחר 10 שניות.

ב. חשב בשתי דרכים שונות את המהירות הממוצעת של הרכב.

ג. חשב את העתק הרכב במשך 10 השניות הראשונות לתנועתו.

פתרון:

א. ניעזר בקשר $v = v_0 + at$, ונקבל:

$$v(10\,\mathrm{s}) = 0 + 2(10) = 20\,\mathrm{m/s}$$

ב. דרך ראשונה:

$$\bar{v} = \frac{v_0 + v}{2} = \frac{0+20}{2} = 10\,\mathrm{m/s}$$

דרך שנייה: המהירות הממוצעת היא המהירות הרגעית במחצית הזמן:

$$\bar{v}(0-10\,\mathrm{s}) = v(5) = 0 + 2(5) = 10\,\mathrm{m/s}$$

ג. ההעתק Δx שווה למכפלת המהירות הממוצעת בזמן. לכן העתק הרכב במהלך 10 השניות הראשונות הוא:

$$\Delta x = \bar{v}t = 10(10) = 100\,\mathrm{m}$$

דוגמה 2

מכונית נוסעת על כביש ישר במהירות קובעה

של 108km/h. ברגע מסוים מבחין הנהג בעצם המונח על הכביש במרחק 50m ממנו, ובולם. כתוצאה מהבלימה המכונית מאטה בתאוטה קבועה של 10m/s^2 עד לעצירתה.

א. חשב את הזמן הדרוש למכונית להיעצר.

ב. חשב את המהירות הממוצעת של המכונית במהלך תהליך הבלימה.

ג. האם המכונית פוגעת בעצם או נעצרת לפניו? הסבר.

פתרון:

א. ניעזר בקשר $v = v_0 + at$. נבחר את הכיוון החיובי בכיוון תנועת המכונית ונקבל:

$v_0 = 108 \text{km/h} = 30 \text{m/s}$

$a = -10 \text{m/s}^2$

ברגע העצירה מתקיים $v = 0$, לכן נקבל:

$0 = 30 - 10t \Rightarrow t = 3 \text{s}$

כלומר המכונית נעצרת תוך 3 שניות.

ב. $\bar{v} = \frac{v_0 + v}{2} = \frac{30 + 0}{2} = 15 \text{m/s}$

דרך נוספת:

$\bar{v}(0 - 3\text{s}) = v(1.5) = 30 + (-10)(1.5) = 15 \text{m/s}$

ג. נחשב את העתק המכונית, Δx, עד לעצירתה. אם הוא גדול מ-50m המכונית תפגע בעצם ואם הוא קטן מ-50m המכונית לא תפגע בו. מתקיים:

$\Delta x = \bar{v}t = 15(3) = 45 \text{m}$

בגלל ש-$\Delta x < 50 \text{m}$, המכונית נעצרת לפני שהיא פוגעת בעצם.

6. המיקום כפונקציה של הזמן בתנועה בקו ישר ובתאוצה קבועה

מכונית נעה בתאוצה קבועה a לאורך כביש ישר בכיוון שנבחר להיות הכיוון החיובי של ציר התנועה (ציר x). נתון שבזמן $t = 0$ מהירות המכונית היא v_0 ומיקומה הוא x_0 ביחס ל-$x = 0$ כפי שמתואר באיור 17. נבטא את מיקום המכונית, x, כפונקציה של הזמן t באמצעות המהירות ההתחלתית v_0, מקומה ההתחלתי x_0 ותאוצתה a. המיקום בזמן t מסומן ב-$x(t)$ (ראה איור 17).

ניעזר בקשר:

$$\Delta x = x(t) - x_0 = \bar{v}t \tag{21}$$

הוכחנו שהמהירות הממוצעת בתנועה בתאוצה קבועה בפרק זמן t נתונה על ידי הביטוי הבא:

$$\bar{v} = v_0 + \tfrac{1}{2}at \tag{22}$$

(ראה משוואה (20)). נציב משוואה (22) במשוואה (21) ונקבל:

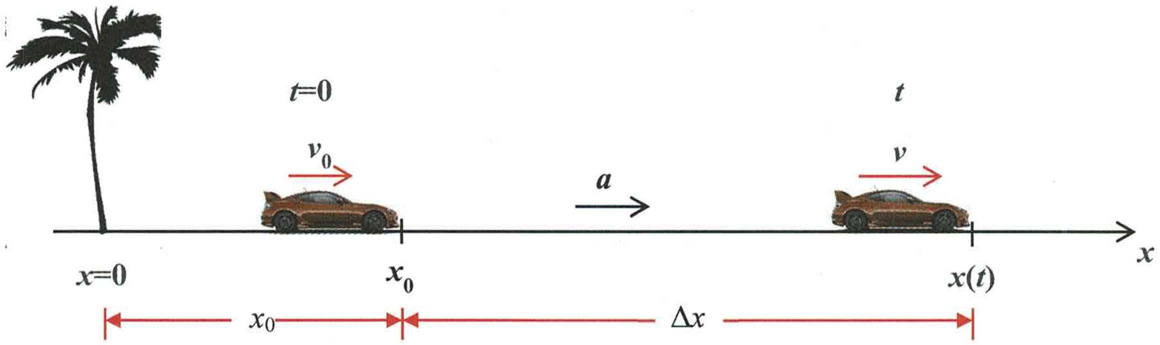
$$x(t) - x_0 = \left(v_0 + \tfrac{1}{2}at\right)t \tag{23}$$

ממשוואה זו נקבל:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2 \tag{24}$$

מקובל, משיקולי נוחות, לבחור $x_0 = 0$ ולסמן את $x(t)$ ב-x. נקבל:

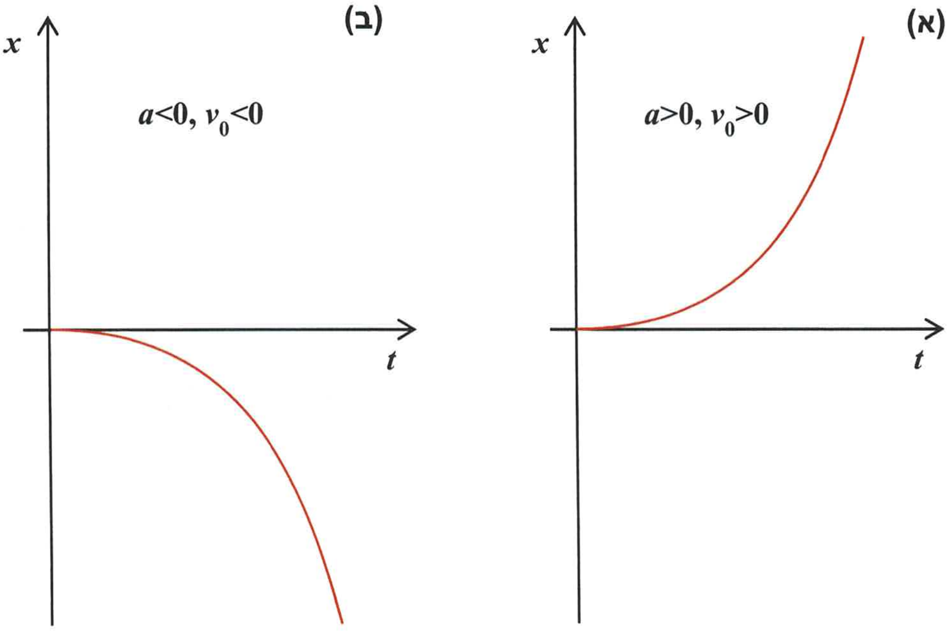
$$x = v_0 t + \tfrac{1}{2}at^2 \tag{25}$$



איור 17: מכונית נוסעת בקו ישר בתאוצה קבועה a. בזמן $t = 0$ מהירותה v_0 ומיקומה x_0.

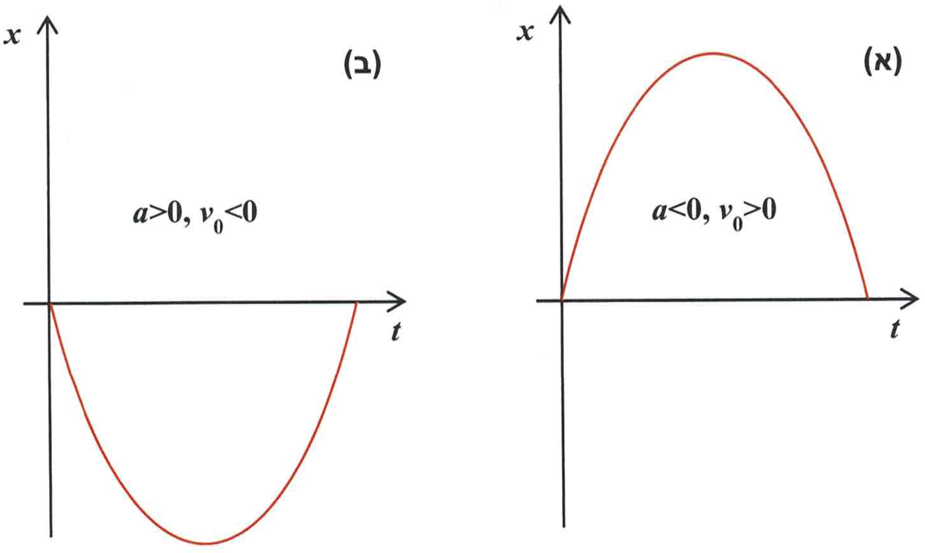
הערות:

1) הקשר המתאר את המיקום כפונקציה של הזמן עבור גוף הנע בקו ישר בתאוצה קבועה הוא פונקציה ריבועית מהצורה: $y = C + Bx + Ax^2$, שתחום ההגדרה שלה: $t \geq 0\text{s}$.
2) הגרף המתאר את המקום כפונקציה של הזמן, הנתון על ידי משוואה (25), הוא פרבולה.
3) אם למהירות v_0 ולתאוצה a יש סימן זהה (שתיהן חיוביות או שתיהן שליליות), אז לפונקציית מקום-זמן בתחום ההגדרה שלה $(t \geq 0\text{s})$ אין נקודת מקסימום. אם $v_0 > 0$ ו-$a > 0$ אז x גדל כל הזמן כמתואר באיור 18א, ואם $v_0 < 0$ ו-$a < 0$ אז x קטן כל הזמן כמתואר באיור 18ב.



איור 18: גרף מקום-זמן בתנועה בקו ישר בתאוצה קבועה כאשר: (א) התאוצה והמהירות ההתחלתית שתיהן חיוביות. (ב) התאוצה והמהירות ההתחלתית שתיהן שליליות.

4) אם למהירות v_0 ולתאוצה a יש סימנים הפוכים, אז יש לפונקציית מקום-זמן בתחום ההגדרה שלה $(t \geq 0\text{s})$ נקודת קיצון. אם $v_0 > 0$ ו-$a < 0$ אז יש לפונקציה נקודת מקסימום כמתואר באיור 19א, ואם $v_0 < 0$ ו-$a > 0$ אז יש לפונקציה נקודת מינימום כמתואר באיור 19ב.



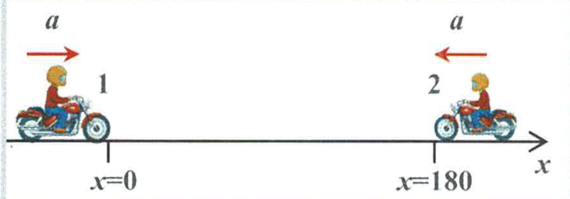
איור 19: גרף מקום-זמן בתנועה בקו ישר בתאוצה קבועה כאשר: (א) התאוצה שלילית והמהירות ההתחלתית חיובית. (ב) התאוצה חיובית והמהירות ההתחלתית שלילית.

בגרף 21א הגוף נע בכיוון החיובי בתאוטה עד לעצירה רגעית בנקודת המקסימום ומשם חוזר בתאוצה בכיוון השלילי. בגרף 21ב הגוף נע בכיוון השלילי בתאוטה עד לעצירה רגעית בנקודת המינימום ומשם חוזר בתאוצה בכיוון החיובי.

דוגמאות:

דוגמה 1

שני אופנועים 1 ו-2 נמצאים במנוחה על כביש ישר במרחק $180\,m$ זה מזה. בזמן $t=0$ הם מתחילים לנוע זה לקראת זה בתאוצה קבועה. תאוצת האופנוע 1 היא $4\,m/s^2$ ותאוצת האופנוע 2 היא $6\,m/s^2$ (ראה תרשים).



א. בחר את הכיוון החיובי בכיוון תנועת האופנוע 1 ואת $x=0$ בנקודת המוצא של אופנוע 1, ובטא את המיקום כפונקציה של הזמן עבור כל אחד משני האופנועים.

ב. מצא את הזמן ואת המיקום שבו האופנועים חולפים זה על פני זה.

ג. חשב את הזמן שבו כל אופנוע מגיע לנקודת המוצא של האופנוע האחר.

ד. שרטט באותה מערכת צירים גרפים המתארים באופן איכותי את המיקום כפונקציה של הזמן עבור כל אופנוע, מתחילת התנועה ועד לרגע שבו הוא מגיע לנקודת המוצא של האופנוע האחר.

פתרון:

א. עבור האופנוע 1:

$$x_1 = x_{01} + v_{01} + \tfrac{1}{2}a_1 t^2 = 0 + 0 + 2t^2$$

$$\Rightarrow x_1 = 2t^2$$

עבור האופנוע 2:

$$x_2 = x_{02} + v_{02} + \tfrac{1}{2}a_2 t^2 = 180 + 0 + \tfrac{1}{2}(-6)t^2$$

$$\Rightarrow x_2 = 180 - 3t^2$$

שים לב שהצבנו $a_2 = -6\,m/s^2$ כי תאוצה זו היא בכיוון השלילי של הציר.

ב. האופנועים חולפים זה על פני זה כאשר מתקיים $x_1 = x_2$:

$$2t^2 = 180 - 3t^2 \quad \Rightarrow t = 6\,s$$

המיקום שבו האופנועים חולפים זה על פני זה הוא:

$$x_1(6\,s) = x_2(6\,s) = 2(6)^2 = 72\,m$$

ג. אופנוע 1 מגיע לנקודת המוצא של אופנוע 2 כאשר $x_1 = 180\,m$:

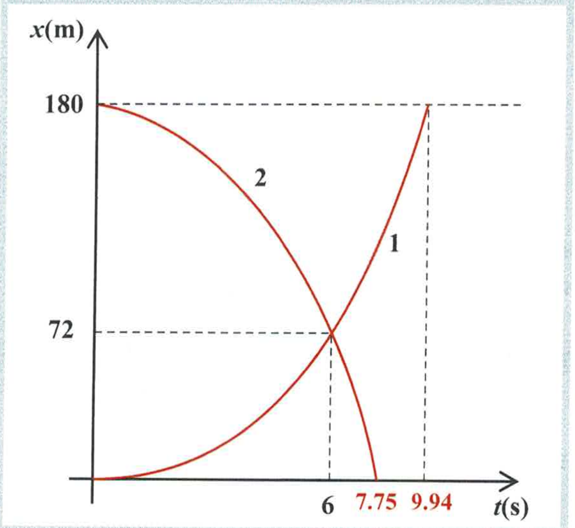
$$\Rightarrow 2t^2 = 180$$

$$\Rightarrow t = 9.49\,s$$

אופנוע 2 מגיע לנקודת המוצא של אופנוע 1 כאשר $x_2 = 0$:

$$\Rightarrow 180 - 3t^2 = 0 \quad \Rightarrow t = 7.75\,s$$

ד.



דוגמה 2

תלמיד רץ במהירות קבועה של $5\,m/s$ על מנת להספיק להגיע לאוטובוס שעצר בתחנה. ברגע $t=0$, כאשר התלמיד היה במרחק $40\,m$ מהאוטובוס, התחיל האוטובוס לנוע בתאוצה קבועה של $0.2\,m/s^2$ (בכיוון תנועת התלמיד). בחר את הכיוון החיובי בכיוון תנועת התלמיד ואת $x=0$ בנקודה שבה היה התלמיד בזמן שבו האוטובוס התחיל לנוע, וענה על השאלות הבאות:

א. בטא את מיקום התלמיד ואת מיקום האוטובוס כפונקציה של הזמן החל מ-$t=0$.

ב. חשב את הזמן שבו התלמיד משיג את

האוטובוס. הסבר את משמעות הפתרונות המתקבלים.

ג. מצא את מיקום האוטובוס ואת מיקום התלמיד בכל אחד מהזמנים שחישבת בסעיף ב'.

ד. חשב את מהירות האוטובוס בזמנים שמצאת בסעיף ב'.

ה. שרטט באותה מערכת צירים גרפים המתארים את המיקום כפונקציה של הזמן עבור התלמיד ועבור האוטובוס.

ו. חשב מהי המהירות הקטנה ביותר בה התלמיד צריך לנוע על מנת שישיג את האוטובוס.

פתרון:

א. נסמן את התלמיד ב-1 והאוטובוס ב-2, ונקבל:

$$x_1 = x_{01} + v_1 t = 0 + 5t$$

$$\Rightarrow x_1 = 5t$$

$$x_2 = x_{02} + v_{02}t + \tfrac{1}{2}at^2 = 40 + 0 + 0.1t^2$$

$$\Rightarrow x_2 = 40 + 0.1t^2$$

ב. התלמיד משיג את האוטובוס כאשר מתקיים: $x_1 = x_2$:

$$5t = 40 + 0.1t^2$$

$$\Rightarrow t^2 - 50t + 400 = 0$$

$$\Rightarrow (t-10)(t-40) = 0$$

מהמשוואה האחרונה מתקבל שהתלמיד משיג את האוטובוס בשני זמנים שונים, הראשון: $t_1 = 10\,\text{s}$, והשני: $t_2 = 40\,\text{s}$.

המשמעות של שני הפתרונות היא שהמפגש בין התלמיד והאוטובוס מתרחש בשני זמנים שונים. בהתחלה התלמיד משיג את האוטובוס ב-$t = 10\,\text{s}$. אם התלמיד לא עולה לאוטובוס וממשיך לרוץ באותה המהירות, הוא יתקדם על האוטובוס הנמצא בתנועה, אבל מכיוון שהאוטובוס מאיץ, האוטובוס מצליח להשיג את התלמיד הנע במהירות קבועה, והוא מגיע אליו ב-$t = 40\,\text{s}$. בזמן זה מתרחש המפגש השני בין האוטובוס לתלמיד.

ג. נקודות המפגש הן:

$$x_1(10\,\text{s}) = 5(10) = 50\,\text{m}$$

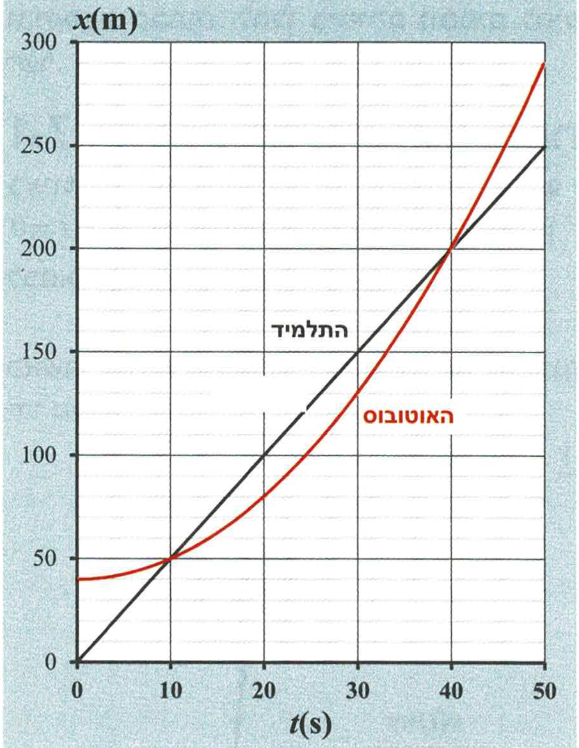
$$x_1(50\,\text{s}) = 5(40) = 200\,\text{m}$$

ד. מהירות האוטובוס נתונה על ידי הקשר: $v_2 = 0 + 0.2t$, לכן נקבל:

$$v_2(10\,\text{s}) = 0.2(10\,\text{s}) = 2\,\text{m/s}$$

$$v_2(40\,\text{s}) = 0.2(40\,\text{s}) = 8\,\text{m/s}$$

ה.



ו. נסמן את מהירות התלמיד ב-v ונקבל עבור התלמיד: $x_1 = vt$. המפגש בין התלמיד לאוטובוס מתקיים כאשר:

$$vt = 40 + 0.1t^2$$

$$\Rightarrow t^2 - 10vt + 400 = 0$$

על מנת שהמפגש יתקיים, צריך שיהיה למשוואה הריבועית האחרונה פתרון. על מנת שיהיה פתרון למשוואה ריבועית צריך להתקיים: $\Delta = b^2 - 4ac \ge 0$. לכן צריך להתקיים:

$$100v^2 - 4(400) \ge 0$$

המהירות המינימלית, $v_{\min}$, שעבורה מתקיים פתרון היא זו המקיימת את השוויון:

$$100v_{\min}^2 - 4(400) = 0 \quad \Rightarrow v_{\min} = 4\,\text{m/s}$$

7. ביטויים נוספים לחישוב העתק גוף הנע בקו ישר ובתאוצה קבועה

בסעיף הקודם למדנו על דרך חישוב ההעתק והמיקום כפונקציה של הזמן עבור גוף הנע בקו ישר ובתאוצה קבועה. להלן ביטויים נוספים לחישוב ההעתק של גוף הנע בתאוצה קבועה לאורך קו ישר.

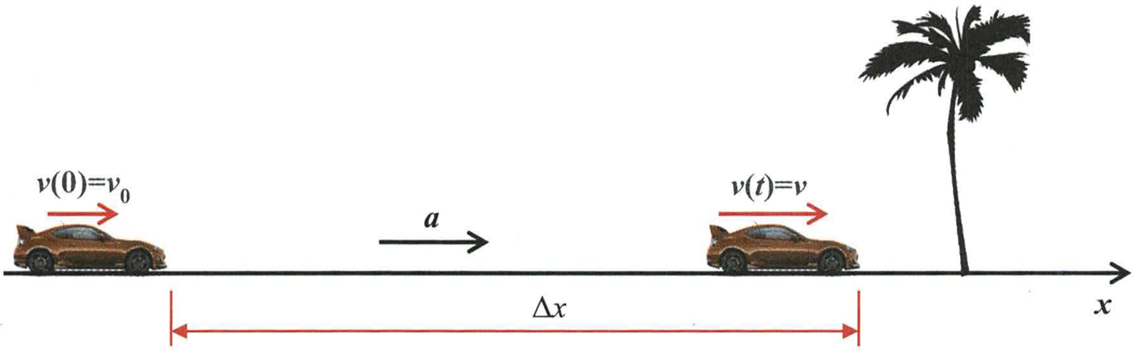
7.1 ההעתק בתלות בזמן ובמהירויות ההתחלתית והסופית

באיור 20 מתוארת מכונית נוסעת על כביש ישר בתאוצה קבועה a. בזמן מסוים שנבחר להיות $t=0$ מהירות המכונית היא v_0. כעבור זמן t מהירותה v. את העתק המכונית עד לזמן t ניתן לבטא באמצעות הקשר:

$$\Delta x = \bar{v}t \tag{26}$$

כאשר $\bar{v}$ היא המהירות הממוצעת של המכונית, ובתנועה בקו ישר ובתאוצה קבועה היא נתונה על ידי הקשר הבא:

$$\bar{v} = \frac{v_0 + v}{2} \tag{27}$$



איור 20: מכונית נוסעת בתאוצה קבועה עוברת העתק Δx במהלך זמן t.

כאשר v_0 היא המהירות ההתחלתית ו-v היא המהירות הסופית. הצבת משוואה (27) במשוואה (26) נותנת:

$$\Delta x = \left(\frac{v_0 + v}{2}\right)t \tag{28}$$

הקשר האחרון הוא קשר לחישוב העתקו של גוף, הנע בקו ישר ובתאוצה קבועה, בתלות במהירויות ההתחלתית (v_0), הסופית (v) ובזמן שחלף (t).

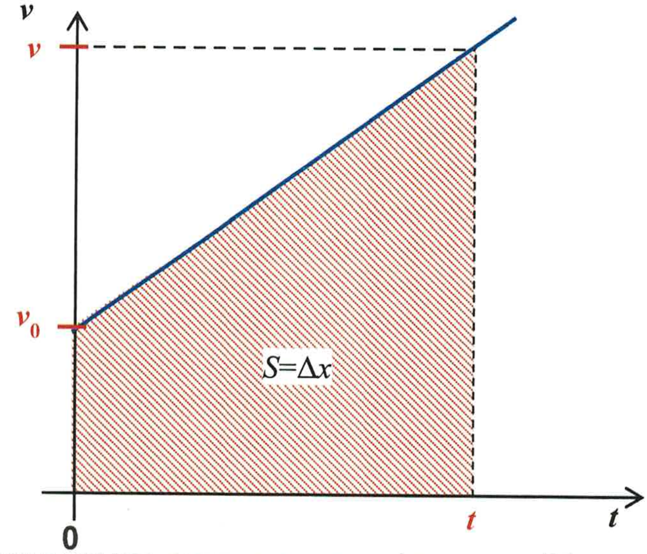
באמצעות הקשר (28) ניתן להוכיח שההעתק Δx של גוף הנע בקו ישר ובתאוצה קבועה עד לזמן מסוים t שווה לשטח הכלוא בין גרף המהירות כפונקציה של הזמן ובין ציר הזמן עד לזמן זה. על מנת להוכיח קשר זה, נחשב את השטח הכלוא בין גרף המהירות כפונקציה של הזמן ובין ציר הזמן עד לזמן t בתנועה בקו ישר ובתאוצה קבועה המתואר באיור 21. שטח זה הוא שטח של טרפז הנתון על ידי:

$$S = \frac{v_0 + v}{2} \times t \tag{29}$$

מהשוואת הביטויים (29) ו-(28) מקבלים ש- $\Delta x = S$.

תוצאה: השטח הכלוא בין גרף המהירות ובין ציר הזמן עד לזמן מסוים בתנועה בקו ישר בתאוצה קבועה שווה להעתק הגוף עד לזמן זה.

נראה בהמשך שתוצאה זו היא נכונה גם עבור תאוצה לא קבועה.



איור 21: השטח הכלוא בין גרף המהירות ובין ציר הזמן עד לרגע מסוים שווה להעתק הגוף עד לרגע זה

7.2 ההעתק בתלות בתאוצה ובמהירויות ההתחלתית והסופית

בעזרת משוואה (28) ניתן להגיע לקשר נוסף לחישוב ההעתק. מהמשוואה $v=v_0+at$ מתקבל:

$$t=\frac{v-v_0}{a} \qquad (30)$$

נציב את t מהמשוואה האחרונה במשוואה (28) ונקבל:

$$\Delta x=\left(\frac{v+v_0}{2}\right)\left(\frac{v-v_0}{a}\right)=\frac{v^2-v_0^2}{2a} \qquad (31)$$

זהו ביטוי נוסף המשמש לחישוב ההעתק בתנועה בתאוצה קבועה כאשר נתונים התאוצה a, המהירות ההתחלתית, v_0 והמהירות הסופית, v. ביטוי זה משמש גם לחישוב המהירות הסופית אם נתונה המהירות ההתחלתית, ההעתק והתאוצה. לצורך זה רושמים את המשוואה האחרונה בצורה הבאה:

$$v^2=v_0^2+2a\Delta x \qquad (32)$$

דוגמאות:

דוגמה 1

מטוס נע על מסלול המראה בקו ישר ובמהירות קבועה של $6\,\text{m/s}$. בזמן מסוים $(t=0)$ הוא מתחיל להאיץ בתאוצה קבועה של $2\,\text{m/s}^2$. המטוס מתנתק מהמסלול לאחר 20 שניות.

א. בטא את מהירות המטוס כפונקציה של הזמן.

ב. חשב את מהירות המטוס ב-$t=20\text{s}$.

ג. חשב, בשתי דרכים שונות, את המהירות הממוצעת של המטוס במהלך תאוצתו (מ-$t=0$ ועד $t=20\text{s}$).

ד. חשב בשתי דרכים שונות את העתק המטוס במהלך תאוצתו.

פתרון:

א. $v=6+2t$.

ב. $v(20\text{s})=6+2(20)=46\,\text{m/s}$

ג. דרך ראשונה:

$$\bar{v}=\frac{v_0+v}{2}=\frac{6+46}{2}=26\,\text{m/s}$$

הדרך השנייה: המהירות הממוצעת בתנועה בתאוצה קבועה בפרק זמן מסוים שווה למהירות הרגעית במחצית פרק זמן זה. לכן המהירות הממוצעת בין $t=0$ ו-$t=20\text{s}$ היא המהירות הרגעית ב-$t=10\text{s}$:

$$\bar{v}=6+2(10)=26\,\text{m/s}$$

ד. דרך ראשונה:

$$\Delta x = \bar{v}t = 26(20) = 520m$$

דרך שנייה:

$$\Delta x = \frac{v_2^2 - v_0^2}{2a} = \frac{46^2 - 6^2}{2(2)} = 520m$$

דוגמא 2

ב-$t=0$ מתחילים לעקוב אחר תנועת רכב הנע בקו ישר ובמהירות קבועה של $18m/s$. לאחר 4 שניות הרכב מתחיל להאט ומקטין את מהירותו בקצב של $3m/s^2$.

א. בטא את מהירות הרכב כפונקציה של הזמן.

ב. חשב את הזמן (יחסית ל-$t=0$) שבו הרכב נעצר.

ג. שרטט גרף המתאר את מהירות הרכב כפונקציה של הזמן מ-$t=0$ ועד לרגע עצירתו.

ד. חשב את העתק הרכב מ-$t=0$ ועד לרגע עצירתו.

ה. חשב את המהירות הממוצעת של הרכב מ-$t=0$ ועד לעצירתו.

פתרון:

א. בפרק הזמן $(0-4s)$ מהירות הרכב קבועה: $v=18m/s$.

לאחר $t=4s$ מהירות הרכב נתונה על ידי:

$$v_2 = 18 - 3(t-4) = 30 - 3t$$

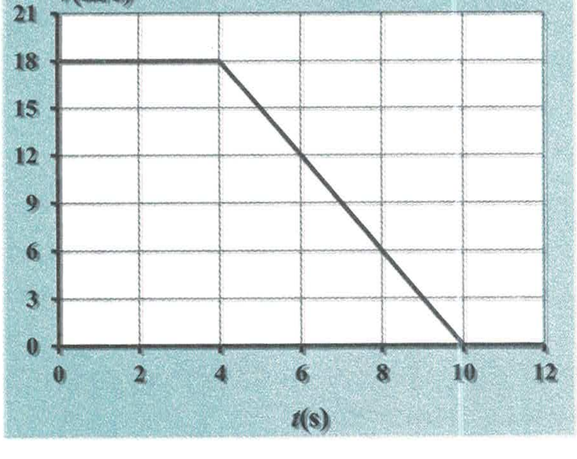
ב. הרכב נעצר כאשר $v_2 = 0$:

$$0 = 30 - 3t \Rightarrow t = 10s$$

ג. המהירות כפונקציה של הזמן נתונה על ידי:

$$v(t) = \begin{cases} 18 & 0 \le t < 4s \\ 30 - 3t & 4 \le t \le 10s \end{cases}$$

הגרף הבא מתאר פונקציה זו:



ד. העתק הגוף מ-$t=0$ ועד ל-$t=10s$ שווה לשטח הכלוא בין הגרף שבסעיף הקודם ובין ציר הזמן עד ל-$t=10s$. מהגרף מתקבל:

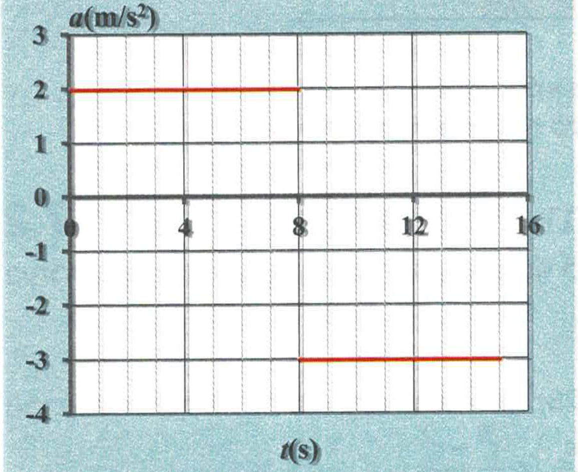
$$\Delta x(0-10s) = \frac{4+10}{2} \times 18 = 126m$$

ה. על פי הגדרת המהירות הממוצעת מתקיים:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{128m}{10s} = 12.8m/s$$

דוגמא 3

הגרף שלפניך מתאר את התאוצה כפונקציה של הזמן עבור גוף נע בקו ישר:



נתון שהמהירות הגוף ב-$t=0$ היא $5m/s$ בכיוון החיובי.

א. בטא את מהירות הגוף כפונקציה של הזמן בפרקי הזמן: $(0-8s)$ ו-$(8-15s)$.

ב. שרטט גרף המתאר את מהירות הגוף מ-$t=0$ ועד $t=15s$.

ג. חשב את העתק הגוף מ-$t=0$ ועד $t=15s$.

ד. חשב את המהירות הממוצעת של הגוף בפרק הזמן מ-$t=0$ ועד $t=15s$.

פתרון:

א. בפרק הזמן $(0-8s)$: $v_1 = 5 + 2t$.

בפרק הזמן $(8-15s)$: $v_2 = v_{02} + a_2(t-8)$, כאשר מתקיים: $a_2 = -3m/s^2$ ו-

$$v_{02} = v_1(8s) = 5 + 2(8) = 21m/s$$

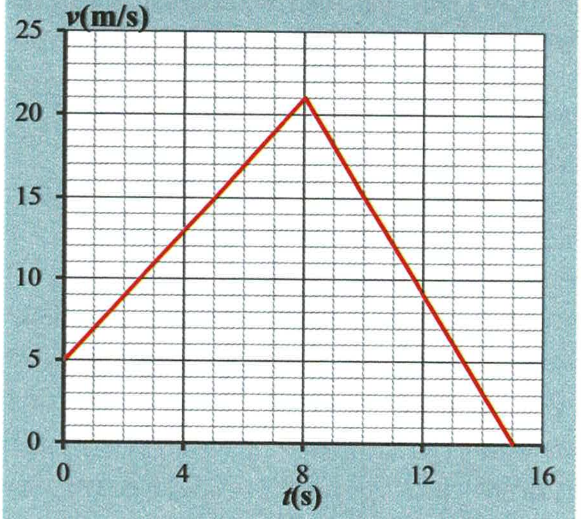
לכן נקבל:

$$v_2 = 21 - 3(t-8) = 45 - 3t$$

לכן נקבל:

$$v=\begin{cases}5+2t & 0\text{s}\le t\le 8\text{s}\\ 45-3t & 8\text{s}<t\le 15\text{s}\end{cases}$$

ב.



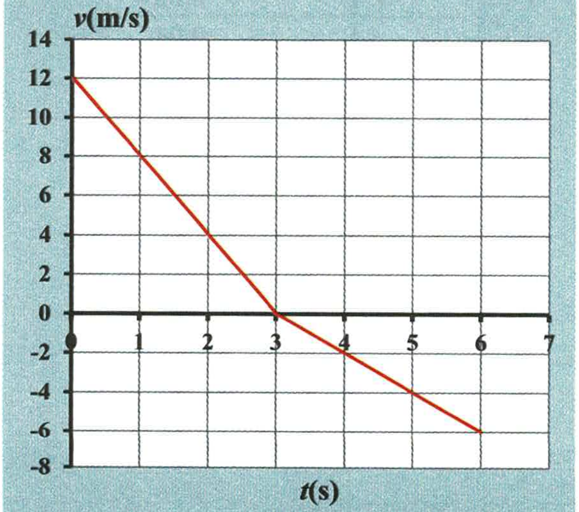
ג. העתק הגוף מ-$t=0$ ועד $t=15\text{s}$ שווה לשטח הכלוא בין גרף המהירות ובין ציר הזמן עד ל-$t=15\text{s}$. שטח זה מורכב מטרפז ומשולש, כך שמתקיים:

$$\Delta x=\left(\frac{21+5}{2}\right)\times 8+\frac{7\times 21}{2}=177.5\text{m}$$

ד. $\bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{177.5\text{m}}{15\text{s}}=11.83\text{m/s}$.

דוגמה 4

בתרשים שלפניך מתוארת המהירות כפונקציה של הזמן עבור גוף הנע בקו ישר:



ענה על השאלות הבאות:

א. תאר במלים את תנועת הגוף.

ב. חשב את:

(1) תאוצת הגוף בשני שלבי התנועה.

(2) ההעתקים של הגוף בשני שלבי התנועה.

(3) ההעתק הכולל של הגוף והדרך אותה עבר.

(4) המהירות הממוצעת של הגוף במהלך פרק הזמן $0-6\text{s}$.

פתרון:

א. בפרק הזמן $(0-3\text{s})$ הגוף נע בכיוון החיובי בתאוצה קבועה שלילית, כלומר מקטין את מהירותו בקצב קבוע עד שנעצר רגעית ב-$t=3\text{s}$. בפרק הזמן $(3-6\text{s})$ הגוף חוזר בכיוון השלילי בתאוצה קבועה שלילית כלומר מגדיל את מהירותו בכיוון השלילי בקצב קבוע.

ב.

(1) בשלב הראשון $(0-3\text{s})$:

$$a_1=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{0-12}{3-0}=-4\text{m/s}^2$$

בשלב השני $(3-6\text{s})$:

$$a_2=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{-6-0}{6-3}=-2\text{m/s}^2$$

(2) בשלב הראשון $(0-3\text{s})$:

$$\Delta x_1=S(0-3\text{s})=\frac{12\times 3}{2}=18\text{m}$$

בשלב השני $(3-6\text{s})$:

$$\Delta x_2=S(3-6\text{s})=\frac{(-6)\times 3}{2}=-9\text{m}$$

(3) ההעתק הכולל של הגוף:

$$\Delta x=\Delta x_1+\Delta x_2=18+(-9)=9\text{m}$$

הדרך אותה עבר הגוף במהלך תנועתו:

$$s=|\Delta x_1|+|\Delta x_2|=18+9=27\text{m}$$

(4) המהירות הממוצעת של הגוף במהלך תנועתו:

$$\bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{9\text{m}}{6\text{s}}=1.5\text{m/s}$$

דוגמה 5

על מנת שמטוס מסוים ימריא הוא חייב להגיע למהירות של 40m/s.

א. מהי התאוצה המינימלית הדרושה למטוס זה על מנת שיצליח להמריא אם נתון שאורך מסלול ההמראה הוא 200m?

ב. מהו אורך המסלול המינימלי על מנת שהמטוס יצליח להמריא, אם נתון

שהתאוצה המקסימלית האפשרית עבור המטוס היא מחצית התאוצה שחישבת בסעיף הקודם?

פתרון:

א. ניעזר בקשר: $a=\frac{v_2^2-v_1^2}{2\Delta x}$, כאשר $v_1=0$ ו-$v_2=40\,\text{m/s}$. על פי קשר זה ככל ש-Δx גדל, התאוצה הדרושה להמראה תקטן. התאוצה הקטנה ביותר מתקבלת עבור Δx הגדול ביותר האפשרי, והוא $200\,\text{m}$. לכן מתקבל:

$$a_{\min}=\frac{v_2^2-v_1^2}{2\Delta x_{\max}}=\frac{40^2-0}{2(200)}=4\,\text{m/s}^2$$

ב. $\Delta x_{\min}=\frac{v_2^2-v_1^2}{2a_{\max}}=\frac{40^2-0}{2(2)}=400\,\text{m}$.

דוגמה 6

תלמיד מודד את המיקום כפונקציה של הזמן עבור גוף הנע לאורך קו ישר בתאוצה קבועה, על ידי חיישן המחובר למחשב. החיישן מודד את מיקום הגוף יחסית ל-$x=0$ בהפרשי זמן של $0.02\,\text{s}$ החל מ-$t=0$. תוצאות המדידות מוצגות בטבלה הבאה:

$t(\text{s})$	$x(\text{m})$
0	0.00
0.02	0.1
0.04	0.19
0.06	0.28
0.08	0.37
0.1	0.45
0.12	0.53
0.14	0.60
0.16	0.67
0.18	0.74
0.2	0.80

א. התבסס על הטבלה הנתונה והכן טבלה של מהירות הגוף כפונקציה של הזמן.

ב. שרטט גרף המתאר את מהירות הגוף כפונקציה של הזמן, וחשב בעזרת גרף זה את תאוצת הגוף ואת מהירותו ההתחלתית.

פתרון:

א. על מנת לחשב את המהירות הרגעית ניעזר בעובדה שהמהירות בזמן מסוים, t, היא הגבול של הגודל $\Delta x/\Delta t$ כאשר $\Delta t\to 0$ סביב לזמן זה. Δt הקטן ביותר סביב לכל זמן שבטבלה, הוא הפרש הזמן בין שתי הנקודות הקרובות ביותר לפני ואחרי זמן זה. מכאן נקבל:

$$v(0.02\,\text{s})\simeq\frac{x(0.04\,\text{s})-x(0\,\text{s})}{0.04\,\text{s}-0\,\text{s}}=$$
$$=\frac{0.19-0}{0.04}=4.75\,\text{m/s}$$

שימו לב! במקרה הנתון בשאלה, מכיוון שהתאוצה קבועה, הגודל שקיבלנו במשוואה האחרונה, שהוא המהירות הממוצעת בין-$t=0$ ו-$t=0.04\,\text{s}$, שווה בדיוק למהירות הרגעית ב-$t=0.02\,\text{s}$ וזאת על סמך העובדה שהמהירות הממוצעת בפרק זמן מסוים שווה למהירות הרגעית באמצע פרק הזמן, כאמור, בתנאי שהתאוצה קבועה.

ננקוט באותה גישה ונקבל:

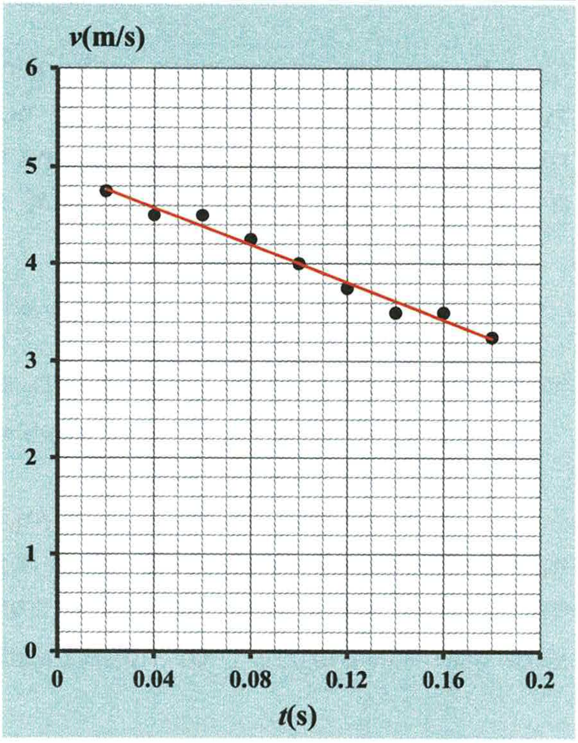
$$v(0.04\,\text{s})\simeq\frac{x(0.06\,\text{s})-x(0.02\,\text{s})}{0.06\,\text{s}-0.02\,\text{s}}=$$
$$=\frac{0.28-0.1}{0.04}=0.45\,\text{m/s}$$

באותה דרך נקבל את הטבלה הבאה:

$t(\text{s})$	$x(\text{m})$
0	
0.02	4.75
0.04	4.5
0.06	4.5
0.08	4.25
0.1	4
0.12	3.75
0.14	3.5
0.16	3.5
0.18	3.25
0.2	

שימו לב! לא ניתן לחשב את המהירות הרגעית בנקודה הראשונה כי אין נקודה לפניה, ולא את המהירות הרגעית בנקודה האחרונה כי אין נקודה אחריה.

ב. מהטבלה הנ"ל נקבל את הגרף הבא, המתאר את המהירות כפונקציה של הזמן, כאשר הקו באדום הוא קו המגמה.



תאוצת הגוף מיוצגת על ידי שיפוע קו המגמה. על מנת לחשב את תאוצת הגוף נבחר שתי נקודות על קו המגמה, לדוגמה: $(0.04\mathrm{s},4.6\mathrm{m/s})$ ו-$(0.12\mathrm{s},3.8\mathrm{m/s})$ ונקבל:

$$a=\frac{4.6-3.8}{0.04-0.12}=-10\,\mathrm{m/s^2}$$

על מנת לחשב את המהירות ההתחלתית, v_0, נציב במשוואת הגרף $(v=v_0+at)$ את התאוצה ונקודה מהגרף, לדוגמה $(0.04\mathrm{s},4.6\mathrm{m/s})$ ונקבל:

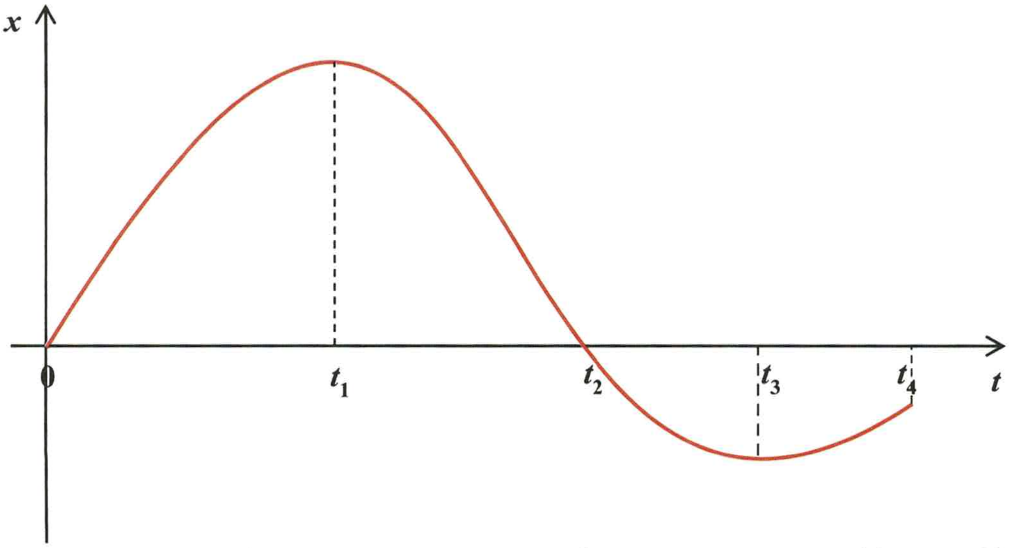
$$4.6=v_0+(-10)(0.04)$$
$$\Rightarrow v_0=5\,\mathrm{m/s}$$

8. ניתוח גרפים בתנועה בקו ישר ובתאוצה לא קבועה

במקרה ותאוצת הגוף אינה קבועה, קשה בדרך כלל לתאר את התנועה באמצעות ביטויים מתמטיים. נהוג במקרה זה לאפיין את התנועה על ידי גרפים המתארים את מיקום הגוף ואת מהירותו כפונקציה של הזמן. בסעיף זה נלמד כיצד לנתח גרפים כאלה על מנת להפיק מהם את מרבית האינפורמציה האפשרית.

8.1 ניתוח גרף מיקום-זמן

הגרף שלפניך (איור 22) מתאר את המיקום של גוף הנע בקו ישר כפונקציה של הזמן.



איור 22: גרף כללי המתאר את המקום של גוף הנע בקו ישר ובתאוצה לא קבועה כפונקציה של הזמן.

מגרף זה ניתן להפיק את המידע הבא:

(1) המהירות הרגעית

כאמור בסעיף (2.4), המהירות בזמן מסוים t היא שיפוע הגרף בנקודה הנמצאת על הגרף המתאימה לזמן זה. מהירות זו נתונה על ידי הביטוי $\Delta x / \Delta t$, כאשר $\Delta t \to 0$ סביב לזמן t. על מנת לחשב גודל זה, נבחר בשני זמנים הקרובים ביותר, מימין ומשמאל לזמן המבוקש, וזאת בדיוק המקסימלי שהגרף מאפשר, מוצאים את x_1 ו- x_2 המתאימים לזמנים אלה ומציבים בביטוי:

$$v \simeq \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

בקשר האחרון רשמנו $(\simeq)$ במקום $(=)$, כי זהו חישוב מקורב שבו Δt הוא הקטן ביותר האפשרי בגבולות דיוק הגרף, אבל הוא אינו שואף לאפס. (ראה דוגמה חישובית בהמשך).

(2) הרגעים שבהם הגוף נמצא במנוחה או בעצירה רגעית

מכיוון ששיפוע הגרף מייצג מהירות, נקבל שבזמנים שבהם שיפוע הגרף מתאפס מהירות הגוף מתאפסת. באיור 22, שיפוע הגרף מתאפס בזמנים t_1 ו- t_3. לכן בזמנים אלה מהירות הגוף מתאפסת. מאחר ולפני ואחרי זמנים אלה הגוף נמצא בתנועה, נסיק שבזמנים אלה הגוף נמצא בעצירה רגעית.

(3) הקטעים בהם הגוף נע בכיוון החיובי ואלה בהם הוא נע בכיוון השלילי

הגוף נע בכיוון החיובי כאשר מהירותו חיובית, ובכיוון השלילי כאשר מהירותו שלילית. מאחר והמהירות מיוצגת על ידי שיפוע גרף זה, נקבל שהגוף נע בכיוון החיובי בתחומים שבהם הגרף עולה, ובכיוון השלילי בתחומים שבהם הגרף יורד. לכן, הגוף שתנועתו מתוארת בגרף המתואר באיור 22, נע בכיוון החיובי בפרקי הזמן $0 \le t < t_1$ ו- $t_3 < t \le t_4$, ובכיוון השלילי בפרק הזמן $t_1 < t < t_3$.

(4) מהירות ממוצעת

לפי ההגדרה, המהירות הממוצעת בין שני זמנים t_1 ו- t_2 היא:

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \qquad (33)$$

גודל זה הוא שיפוע הקו המחבר בין הנקודות הנמצאות על הגרף המתאימות לזמנים t_1 ו- t_2.

(5) האופן שבו המהירות משתנה:

אם המהירות חיובית וקטנה (השיפוע חיובי וקטן), לדוגמה בפרק הזמן $(0 - t_1)$ באיור 22, אז הגוף נע בכיוון החיובי במהירות שהולכת וקטנה עם הזמן (הגוף מאט בכיוון החיובי).

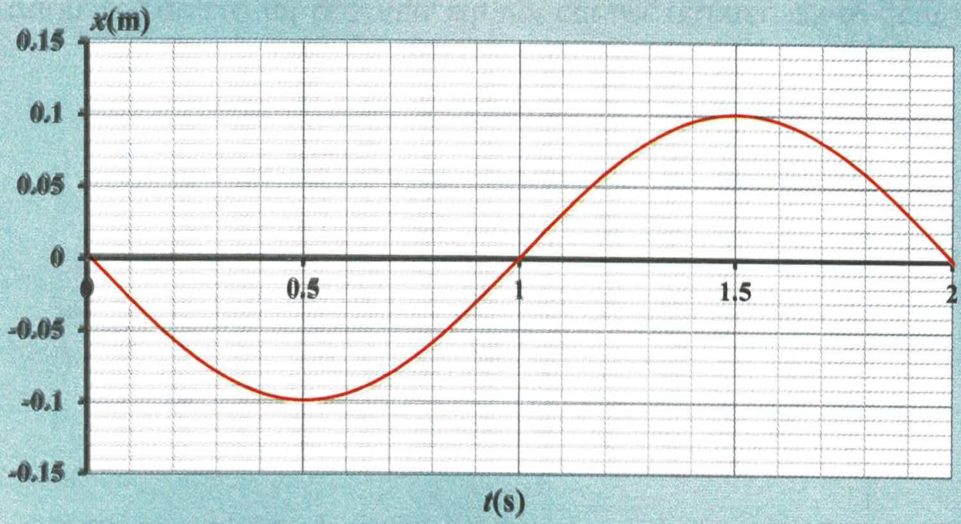
אם המהירות חיובית וגדלה (השיפוע חיובי וגדל), לדוגמה בפרק הזמן $(t_3 - t_4)$ באיור 22, אז הגוף נע בכיוון החיובי תוך כדי הגדלת מהירותו (הגוף מאיץ בכיוון החיובי).

אם המהירות שלילית וגדלה בערכה המוחלט (השיפוע שלילי וגדל בערכו המוחלט), לדוגמה בפרק הזמן $(t_1 - t_2)$ באיור 22, אז הגוף נע בכיוון השלילי תוך כדי הגדלת גודל מהירותו (מאיץ בכיוון השלילי).

אם המהירות שלילית וקטנה בערכה המוחלט (השיפוע שלילי וקטן בערכו המוחלט), לדוגמה בפרק הזמן $(t_2 - t_3)$ באיור 22, אז הגוף נע בכיוון השלילי תוך כדי הקטנת גודל מהירותו (מאט בכיוון השלילי).

דוגמה

נתון הגרף הבא המתאר את המיקום של גוף הנע בקו ישר כפונקציה של הזמן:



ענה על השאלות הבאות:

א. מצא את הזמנים שבהם מהירות הגוף מתאפסת.

ב. חשב את המהירות הממוצעת של הגוף בפרק הזמן $(0.5-1.5s)$.

ג. חשב את מהירות הגוף (הרגעית) בזמנים: $t=1s$ ו- $t=1.2s$.

ד. מצא את פרקי הזמן שבהם הגוף נע בכיוון החיובי ואת פרקי הזמן בהם הגוף נע בכיוון השלילי.

ה. באלו פרקי זמן הגוף מאיץ בכיוון החיובי ובאלו פרקי זמן הגוף מאט בכיוון החיובי? הסבר.

ו. באלו פרקי זמן הגוף מאיץ בכיוון השלילי ובאלו פרקי זמן הגוף מאט בכיוון השלילי? הסבר.

פתרון:

א. המהירות מיוצגת על יד שיפוע הגרף. המהירות מתאפסת בזמנים שבהם שיפוע הגרף מתאפס, וזה קורה בזמנים: $t=0.5s$ ו- $t=1.5s$.

ב.

$$\bar{v}(0.5-1.5s)=\frac{x(1.5)-x(0.5)}{1.5s-0.5s}=$$

$$=\frac{0.1m-(-0.1)m}{1s}=0.2m/s$$

ג. ניעזר בהגדרת המהירות הרגעית: $v=\lim_{\Delta t\to 0}(\Delta x/\Delta t)$.

1. עבור $t=1s$: הערך הקטן ביותר עבור Δt סביב ל-$t=1s$ בתחום הדיוק של הגרף הוא פרק הזמן בין $t=0.9s$ ובין $t=1.1s$. לכן נקבל:

$$v(1s)=\frac{x(1.1)-x(0.9)}{1.1s-0.9s}=$$

$$=\frac{0.03m-(-0.03)m}{0.2s}=0.3m/s$$

2. עבור $t=1.2s$: באותה דרך נקבל:

$$v(1.2s)=\frac{x(1.3)-x(1.1)}{1.3s-1.1s}=$$

$$=\frac{0.08m-0.03m}{0.2s}=0.25m/s$$

ד. הגוף נע בכיוון החיובי בפרקי הזמן שבהם הגרף עולה, וזה מתקיים בפרק הזמן: $(0.5-1.5s)$. הוא נע בכיוון השלילי בפרקי הזמן שבהם הגרף יורד, וזה מתקיים בפרקי הזמן: $(0-0.5s)$ ו- $(1.5-2s)$.

ה. הגוף מאיץ בכיוון החיובי בפרקי הזמן שבהם השיפוע חיובי וגדל עם הזמן, וזה מתקיים בפרק הזמן $(0.5-1s)$.

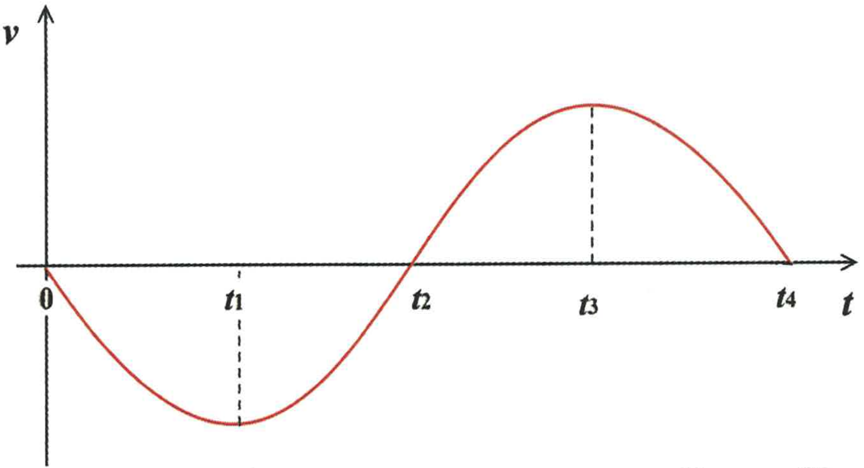
הגוף מאט בכיוון החיובי בפרקי הזמן שבהם השיפוע חיובי וקטן עם הזמן, וזה מתקיים בפרק הזמן $(1-1.5s)$.

ו. הגוף מאיץ בכיוון השלילי בפרקי הזמן שבהם השיפוע שלילי וגדל עם הזמן בערכו המוחלט, וזה מתקיים בפרק הזמן $(1.5-2s)$.

הגוף מאט בכיוון השלילי בפרקי הזמן שבהם השיפוע שלילי וקטן עם הזמן בערכו המוחלט, וזה מתקיים בפרק הזמן $(0-0.5s)$.

8.2 ניתוח גרף מהירות-זמן

באיור 23 מתואר גרף מהירות-זמן כללי עבור גוף הנע בקו ישר ובתאוצה שאינה קבועה.



איור 23: גרף כללי המתאר את המהירות כפונקציה של הזמן עבור גוף הנע בקו ישר בתאוצה לא קבועה.

מגרף זה ניתן להפיק את המידע הבא:

(1) כיוון התנועה

כאשר המהירות חיובית הגוף נע בכיוון החיובי, וכאשר המהירות שלילית הגוף נע בכיוון השלילי. באיור 23, הגוף נע בכיוון החיובי בפרק הזמן (t_2-t_4), ובכיוון השלילי בפרק הזמן $(0-t_2)$.

(2) הזמנים שבהם הגוף נעצר רגעית

בזמנים שבהם הגרף חותך את ציר הזמן, מהירות הגוף מתאפסת, כלומר הגוף נעצר רגעית ומשנה את כיוון תנועתו. בזמן t_2 באיור 23, הגוף נעצר רגעית ומשנה את כיוון תנועתו, מתנועה בכיוון השלילי לתנועה בכיוון החיובי.

(3) התאוצה הרגעית

התאוצה בזמן מסוים t היא שיפוע הגרף בנקודה הנמצאת על הגרף המתאימה לזמן זה. תאוצה זו נתונה על ידי הביטוי $\Delta v/\Delta t$, כאשר $\Delta t\to 0$ סביב לזמן t. על מנת לחשב גודל זה, נבחר בשני זמנים הקרובים ביותר, מימין ומשמאל לזמן המבוקש, וזאת בדיוק המקסימלי שהגרף מאפשר, מוצאים את v_1 ו-v_2 המתאימים לזמנים אלה ומציבים בביטוי:

$$a\simeq\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_2-v_1}{t_2-t_1}$$

בקשר האחרון רשמנו $(\simeq)$ במקום $(=)$, כי זהו חישוב מקורב שבו Δt הוא הקטן ביותר האפשרי בגבולות דיוק הגרף, אבל הוא אינו שואף לאפס. (ראה דוגמה בהמשך).

(4) סימן התאוצה

בפרקי הזמן שבהם הגרף עולה, התאוצה חיובית, ובפרקי הזמן שבהם הגרף יורד, התאוצה שלילית. בגרף המתואר באיור 23 התאוצה חיובית בפרק הזמן (t_1-t_3) ושלילית בפרקי הזמן $(0-t_1)$ ו-(t_3-t_4).

(5) תיאור מילולי של התנועה

בתיאור המילולי של התנועה מסתמכים על סימני המהירות והתאוצה, כך שמתקיים:

א. אם המהירות שלילית והתאוצה שלילית (שיפוע הגרף שלילי) אז הגוף מאיץ בכיוון השלילי, לדוגמה בפרק הזמן $(0-t_1)$ באיור 23.

ב. אם המהירות שלילית והתאוצה חיובית (שיפוע הגרף חיובי) אז הגוף מאט בכיוון השלילי,

לדוגמה בפרק הזמן (t_1-t_2) באיור 23.

ג. אם המהירות חיובית והתאוצה חיובית (שיפוע הגרף חיובי) אז הגוף מאיץ בכיוון החיובי, לדוגמה בפרק הזמן (t_2-t_3) באיור 23.

ד. אם המהירות חיובית והתאוצה שלילית (שיפוע הגרף שלילי) אז הגוף מאט בכיוון החיובי, לדוגמה בפרק הזמן (t_3-t_4) באיור 23.

(6) ההעתק

הוכחנו שהעתק גוף הנע בקו ישר ובתאוצה קבועה a במהלך פרק זמן Δt נתון על ידי:

$$\Delta x=\bar{v}\Delta t=\left(\frac{v_0+v}{2}\right)\Delta t \qquad (34)$$

כאשר v_0 היא המהירות בתחילת פרק הזמן, ו-v היא המהירות בסוף פרק הזמן. העתק זה שווה לשטח הכלוא בין גרף המהירות ובין ציר הזמן במשך פרק הזמן Δt.

אם התאוצה אינה קבועה, כפי שמתואר באיור 24, על מנת לחשב את העתק הגוף עד לזמן t לא נוכל להשתמש בקשר (34) כי הוא נכון רק לתאוצה קבועה. במקרה זה ננקוט בגישה הבאה:

נחלק את פרק הזמן t ל-N לאלמנטים שווים, Δt כל אחד, כך שנקבל את הזמנים: t_0, t_1, $\cdots$, t_N, כפי שמתואר באיור 24. נסמן את המהירויות המתאימות לזמנים אלה ב-v_0, v_1, $\cdots$, v_N (ראה איור 24). אם מספר האלמנטים N גדול מאוד, ניתן להניח שהשינוי במהירות בכל אלמנט הוא קטן מאוד, והתאוצה בכל אלמנט היא קבועה בערך, כך שנקבל שהעתק הגוף באלמנט הראשון שווה ל:

$$\Delta x_1\approx\left(\frac{v_0+v_1}{2}\right)\Delta t \qquad (35)$$

כאשר v_0 היא המהירות בתחילת האלמנט הראשון ו-v_1 היא המהירות בסוף אלמנט זה. בקשר זה לא רשמנו שוויון אלא $(\approx)$ מכיוון שיש טעות הנובעת מההנחה שהתאוצה באלמנט זה קבועה.

בדרך דומה נקבל:

$$\Delta x_2\approx\left(\frac{v_1+v_2}{2}\right)\Delta t \qquad (36)$$

$$\Delta x_3\approx\left(\frac{v_2+v_3}{2}\right)\Delta t \qquad (37)$$

$$\vdots$$

$$\Delta x_N\approx\left(\frac{v_{N-1}+v_N}{2}\right)\Delta t \qquad (38)$$

ההעתק הכולל המתבצע במהלך הזמן t שווה לסכום כל ההעתקים הנ"ל:

$$\Delta x\approx\Delta x_1+\Delta x_2+\Delta x_3+\cdots+\Delta x_N \qquad (39)$$

בקשר האחרון יש טעות מסוימת הנובעת מההנחה שהתאוצה בכל אלמנט היא קבועה, טעות זו קטנה ככל שמגדילים את מספר האלמנטים, N. בגבול $N\to\infty$ נקבל שהסכום שמופיע מצד ימין במשוואה (39) משתווה להעתק. לכן ניתן לרשום:

$$\Delta x=\lim_{N\to\infty}(\Delta x_1+\Delta x_2+\Delta x_3+\cdots+\Delta x_N) \qquad (40)$$

מצד שני, Δx_1 המופיע במשוואה (39) שווה ל-S_1, שטח הטרפז המופיע באיור 24. Δx_2 שווה ל-S_2 שהוא שטח הטרפז השני המופיע באיור 24, וכך הלאה עד Δx_N השווה ל-S_N, שהוא שטח הטרפז האחרון. מכאן נקבל שמשוואה (40) שקולה לקשר הבא:

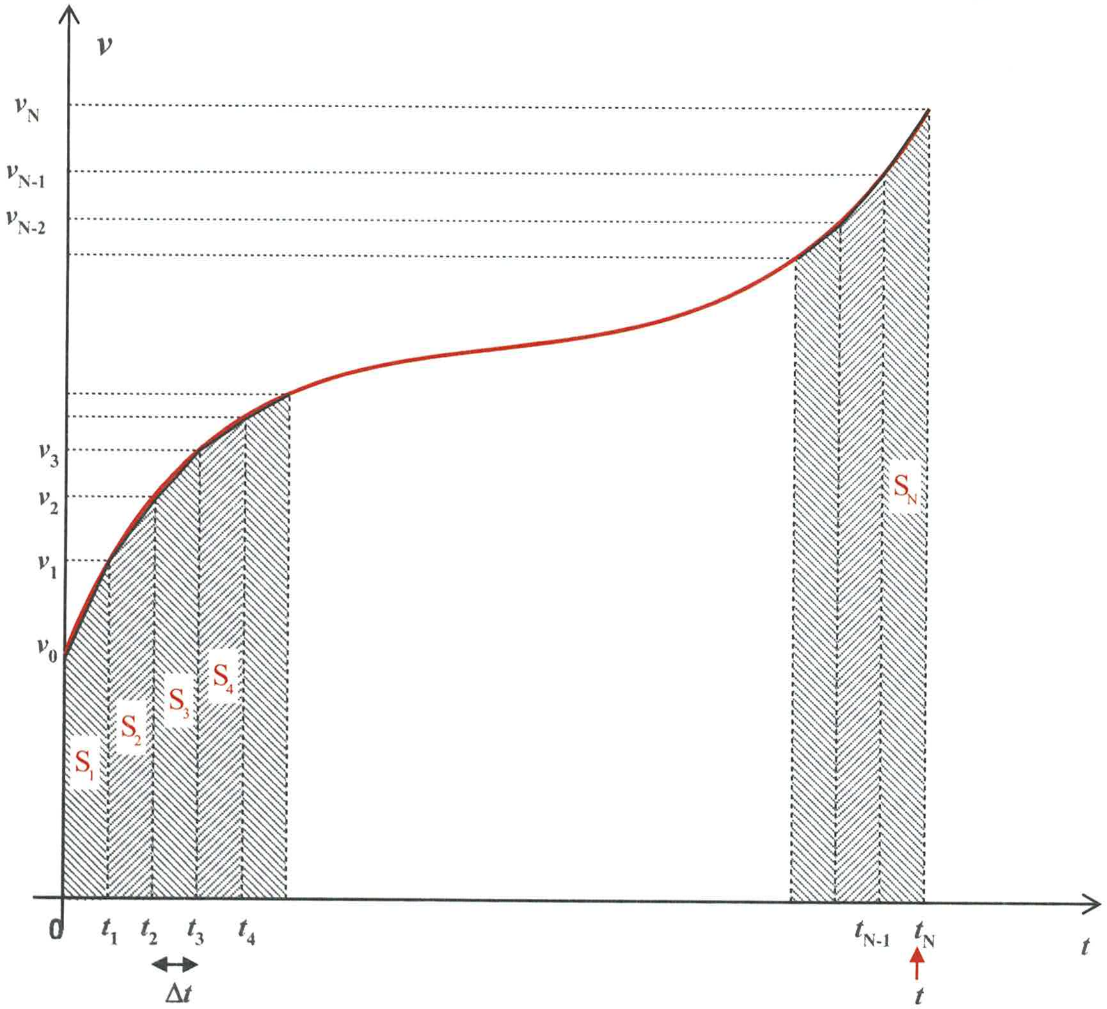
$$\Delta x=\lim_{N\to\infty}(S_1+S_2+S_3+\cdots+S_N) \qquad (41)$$

מכיוון שהגבול של הסכום $(S_1+S_2+S_3+\cdots+S_N)$ עבור $N\to\infty$, שווה בדיוק לשטח הכלוא בין גרף המהירות ובין ציר הזמן עד לזמן הנתון t, נקבל על סמך המשוואה (41), שהעתק הגוף במשך

הזמן מ-$t=0$ ועד t, שווה לשטח הכלוא בין הגרף ובין ציר הזמן עד לזמן t:

$$\Delta x\left(0\to t\right)=S(0\to t) \qquad (42)$$

(ראה איור 24).

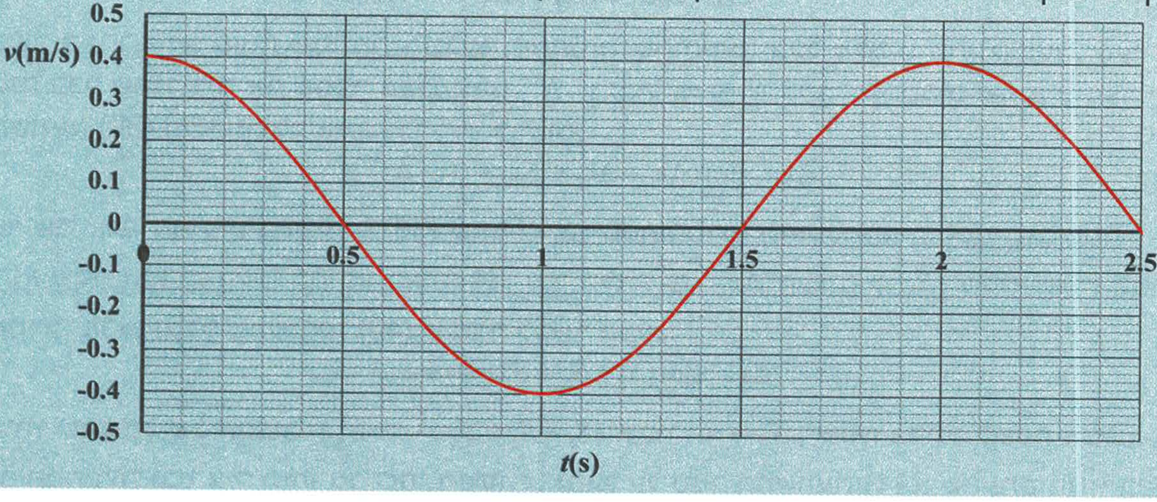

v
v_N
v_{N-1}
v_{N-2}
v_3
v_2
v_1
v_0
S_1
S_2
S_3
S_4
S_N
0
t_1
t_2
t_3
t_4
Δt
t_{N-1}
t_N
t
t

איור 24: גרף מהירות-זמן של גוף הנע בקו ישר בתאוצה לא קבועה.

תוצאה: השטח הכלוא בין גרף המהירות כפונקציה של הזמן ובין ציר הזמן עד לרגע מסוים שווה להעתק הגוף עד לרגע זה.

דוגמה:

הגרף שלפניך מתאר את המהירות כפונקציה של הזמן של גוף הנע בקו ישר.



נתון כי בין הגרף וציר הזמן בפרק הזמן מ-$t=0$ ועד $t=0.5\text{s}$ יש כ-66 משבצות קטנות, ובין הגרף וציר הזמן בפרק הזמן מ-$t=0.5\text{s}$ ועד $t=1.5\text{s}$ יש כ-132 משבצות קטנות.

א. קבע את הזמנים בהם הגוף נע בכיוון החיובי, את הזמנים בהם הגוף נע בכיוון השלילי, ואת אלה שבהם מהירות הגוף מתאפסת.

ב. מצא את הזמנים שבהם הגוף משנה את כיוון תנועתו מהכיוון החיובי לשלילי, ולהפך, מהכיוון השלילי לחיובי.

ג. תאר במלים את תנועת הגוף בפרקי הזמן הבאים; בתשובתך התייחס לכיוון המהירות ולגודל התאוצה אם הוא קבוע, גדל או קטן.

(1) $0<t<0.5\text{s}$.
(2) $0.5<t<1\text{s}$.
(3) $1<t<1.5\text{s}$.
(4) $1.5<t<2\text{s}$.
(5) $2<t<2.5\text{s}$.

ד. מצא את העתק הגוף בפרקי הזמן:

(1) $0-0.5\text{s}$.
(2) $0.5-1.5\text{s}$.
(3) $0-1.5\text{s}$.

ה. חשב את המהירות הממוצעת של הגוף בפרק הזמן $0-1.5\text{s}$.

פתרון:

א. הגוף נע בכיוון החיובי כאשר מהירותו חיובית, כלומר בפרקי הזמן: $0<t<0.5\text{s}$ ו-$1.5<t<2.5\text{s}$. הוא נע בכיוון השלילי כאשר מהירותו שלילית, וזה קורה בפרק הזמן $0.5<t<1.5\text{s}$.

הזמנים שבהם מהירות הגוף מתאפסת הם: 0.5s, 1.5s ו-2.5s.

ב. הגוף משנה את כיוון מהירותו מהכיוון החיובי לשלילי בזמנים שבהם מהירותו משנה סימן מחיובי לשלילי, וזה קורה ב-$t=0.5\text{s}$. הגוף משנה את כיוון מהירותו מהכיוון השלילי לחיובי בזמנים שבהם מהירותו משנה סימן משלילי לחיובי (ב-$t=1.5\text{s}$).

ג.

(1) בפרק הזמן $0<t<0.5\text{s}$ המהירות חיובית והתאוצה, שהיא שיפוע הגרף, שלילית וגדלה עם הזמן (בערכה המוחלט), לכן בפרק זמן זה הגוף נע בכיוון החיובי ומקטין את מהירותו בקצב שהולך וגדל עם הזמן עד לעצירה רגעית ב-$t=0.5\text{s}$.

(2) בפרק הזמן $0.5<t<1\text{s}$ המהירות שלילית והתאוצה שלילית וקטנה עם הזמן (בערכה המוחלט), לכן בפרק זמן זה הגוף נע בכיוון השלילי ומגדיל את גודל מהירותו בכיוון זה, אבל בקצב שהולך וקטן עם הזמן עד שמגיע למהירות מקסימלית ב-$t=1\text{s}$.

(3) בפרק הזמן $1<t<1.5\text{s}$ המהירות שלילית והתאוצה חיובית וגדלה עם הזמן, לכן בפרק זמן זה הגוף נע בכיוון השלילי ומקטין את גודל מהירותו בקצב שהולך וגדל עם הזמן עד לעצירה רגעית ב-$t=1.5\text{s}$.

(4) בפרק הזמן $1.5<t<2\text{s}$ המהירות חיובית והתאוצה חיובית וקטנה עם הזמן, לכן בפרק זמן זה הגוף נע בכיוון החיובי ומגדיל את גודל מהירותו בכיוון זה בקצב שהולך וקטן עם הזמן עד למהירות מקסימלית ב-$t=2\text{s}$.

(5) בפרק הזמן $2<t<2.5\text{s}$ המהירות חיובית והתאוצה שלילית וגדלה (בערכה המוחלט) עם הזמן, לכן בפרק זמן זה הגוף נע בכיוון החיובי ומקטין את מהירותו בכיוון זה בקצב שהולך וגדל עם הזמן עד לעצירה רגעית ב-$t=2.5\text{s}$.

ד. העתק הגוף בפרק זמן מסוים שווה לשטח הכלוא בין גרף המהירות וציר הזמן בפרק זמן זה. שטח זה שווה למכפלת מספר המשבצות הקטנות הכלואות בין גרף המהירות לציר הזמן בשטחה של משבצת אחת.

(1) בפרק הזמן $0-0.5\text{s}$, קיימות 66

משבצות. לכן:

$$\Delta x_1 = 66\times\left(0.1\,\mathrm{s}\times\frac{0.1}{5}\,\mathrm{m/s}\right)=0.132\,\mathrm{m}$$

(2) בפרק הזמן $0.5-1.5\,\mathrm{s}$, קיימות 132 משבצות. לכן:

$$\Delta x_2 = 132\times\left[0.1\,\mathrm{s}\times\left(-\frac{0.1}{5}\,\mathrm{m/s}\right)\right]=-0.264\,\mathrm{m}$$

(3) ההעתק הכולל בפרק הזמן $0-1.5\,\mathrm{s}$ שווה ל:

$$\Delta x = \Delta x_1+\Delta x_2 = $$
$$=0.132+(-0.264)=-0.132\,\mathrm{m}$$

ה. מתקיים:

$$\bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{-0.132\,\mathrm{m}}{1.5\,\mathrm{s}}=-0.088\,\mathrm{m/s}$$

9. מהירות יחסית ותאוצה יחסית בתנועה בקו ישר

9.1 מהירות יחסית בתנועה בקו ישר

כזכור, התנועה היא שינוי מיקומו של גוף במהלך הזמן. מכיוון שהמיקום הוא גודל יחסי, כלומר הוא נקבע ביחס לצופה או למערכת ייחוס שנבחרה, אין משמעות לתנועה ללא מערכת יחוס, שביחס אליה משנה הגוף את מיקומו. לדוגמה, כדור הארץ נע סביב השמש במסלול אליפטי במהירות של $30\,\mathrm{km/s}$ ביחס לשמש. אבל אנחנו, על כדור הארץ, לא מרגישים תנועה זו, בגלל שאין מערכות ייחוס קרובות אלנו, הנמצאות במנוחה יחסית לשמש, שבעזרתן נוכל להרגיש בתנועה זו. אם, לדוגמה, היה כביש קבוע במרחב לאורך מסלול כדור הארץ סביב לשמש, כביש הנמצא במנוחה יחסית לשמש, היינו מגלים שכדור הארץ מתקדם במהירות מסחררת.

מכאן שאין משמעות לקביעת מהירות ללא מערכת ייחוס שביחס אליה מהירות זו נמדדת. בדרך כלל אם נציין מהירות ללא קביעת מערכת ייחוס, הכוונה היא שמהירות זו היא ביחס לעצמים הנמצאים במנוחה על כדור הארץ. לדוגמה, אם נאמר שמהירות מכונית היא $80\,\mathrm{km/h}$, הכוונה היא שהמכונית עוברת $80\,\mathrm{km}$ בכל שעה ביחס לנקודה קבועה על הכביש.

לפעמים נצטרך למדוד או לקבוע את מהירותו של גוף ביחס לגוף אחר הנמצא גם הוא בתנועה ביחס לפני כדור הארץ. נלמד כאן איך לחשב מהירות זו במקרה בו שני הגופים נעים לאורך אותו קו ישר. בפרק (8) נלמד איך לחשב את המהירות היחסית כאשר שני הגופים נעים במישור.

באיור 25א מתוארות שתי מכוניות A ו-B הנוסעות על כביש ישר. מכונית A נוסעת במהירות קבועה v_A ביחס לכביש, ומכונית B נוסעת במהירות קבועה v_B ביחס לאותו כביש. נבחר את הכיוון החיובי של ציר x בכיוון תנועת המכוניות. נניח שבזמן t_1 מיקום המכונית A ביחס לראשית $x=0$ הוא x_{A1}, ומיקום המכונית B ביחס לראשית הוא x_{B1}. מקום המכונית A ביחס למכונית B בזמן זה (כלומר ביחס לציר שראשיתו נמצאת על המכונית B) הוא:

$$(x_{AB})_1 = x_{A1}-x_{B1} \tag{43}$$

(ראה איור 25א).

נניח שבזמן מאוחר יותר t_2, מיקום המכונית A, ביחס ל-$x=0$ הוא x_{A2}, ומיקום המכונית B ביחס ל-$x=0$ יהיה x_{B2}, לכן מקום המכונית A ביחס למכונית B בזמן זה הוא:

$$(x_{AB})_2 = x_{A2}-x_{B2} \tag{44}$$

(ראה איור 25ב).

מהירות המכונית A יחסית למכונית B שמסומנת ב-v_{AB}, היא קצב שינוי המקום של המכונית A ביחס למכונית B, כלומר קצב השינוי של הגודל x_{AB}. לכן נקבל:

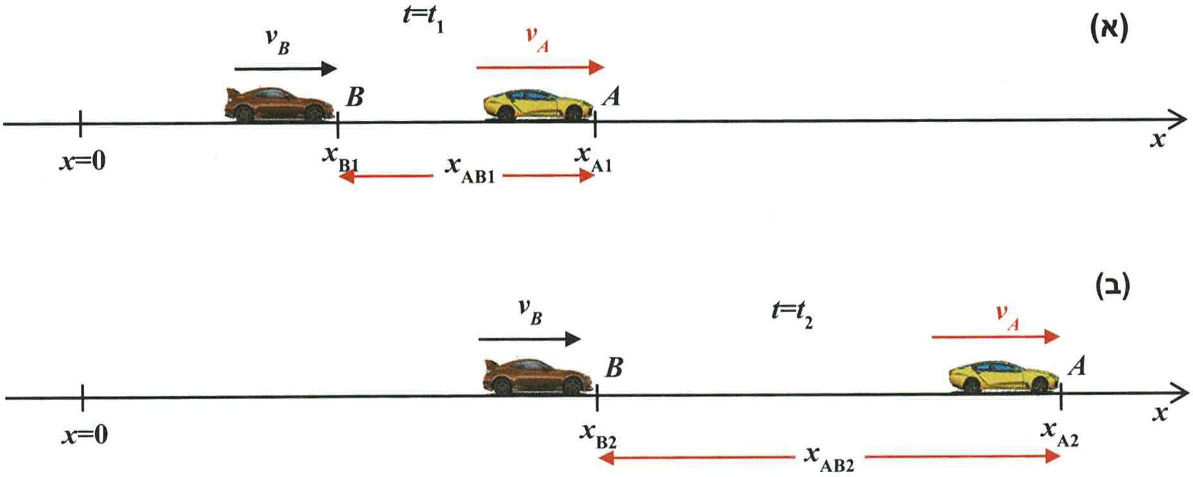
$$v_{AB}=\frac{\Delta x_{AB}}{\Delta t}=\frac{(x_{AB})_2-(x_{AB})_1}{t_2-t_1}=\frac{(x_{A2}-x_{B2})-(x_{A1}-x_{B1})}{t_2-t_1} \tag{45}$$

מביטוי זה נקבל:

$$v_{AB}=\left(\frac{x_{A2}-x_{A1}}{t_2-t_1}\right)-\left(\frac{x_{B2}-x_{B1}}{t_2-t_1}\right)=v_A-v_B \qquad (46)$$

בדרך דומה נוכל לקבל:

$$v_{BA}=v_B-v_A \qquad (47)$$



איור 25: (א) המקום של הרכב A ביחס לרכב B ברגע t_1. (ב) המקום של הרכב A ביחס לרכב B ברגע t_2.

הערות:

1) בביטוי לחישוב המהירות היחסית יש לקחת בחשבון את הסימנים של המהירויות.

2) מתקיים שמהירות A ביחס ל-B שווה בגודל ומנוגדת בכיוונה למהירות B ביחס ל-A, כלומר: $v_{AB}=-v_{BA}$.

3) ניתן להוכיח שהקשרים (46) ו-(47) מתקיימים גם למהירויות הרגעיות.

דוגמאות:

דוגמה 1

מכונית A נוסעת על כביש ישר במהירות קבועה של $50\,\mathrm{km/h}$. מכונית אחרת, B, נוסעת על אותו כביש בכיוון הנגדי במהירות של $70\,\mathrm{km/h}$.

א. חשב את מהירות המכונית A ביחס למכונית B.

ב. חשב את מהירות המכונית B ביחס למכונית A.

פתרון:

נבחר את הכיוון החיובי בכיוון תנועת המכונית A ונקבל: $v_A=50\,\mathrm{km/h}$ ו-$v_B=-70\,\mathrm{km/h}$.

א. מהירות המכונית A ביחס למכונית B היא:

$$v_{AB}=v_A-v_B=50-(-70)=120\,\mathrm{km/h}$$

ב. מהירות המכונית B ביחס למכונית A היא:

$$v_{BA}=v_B-v_A=(-70)-50=-120\,\mathrm{km/h}$$

דוגמה 2

רכב נע על כביש ישר במהירות קבועה של $90\,\mathrm{km/h}$. מאחוריו נעה ניידת משטרה באותו כיוון במהירות של $120\,\mathrm{km/h}$.

א. חשב את מהירות הרכב ביחס לניידת המשטרה.

ב. חשב את מהירות הניידת ביחס לרכב.

ג. נתון שהמרחק בין הרכב והניידת בזמן מסוים $(t=0)$ הוא $15\,\mathrm{km}$. חשב מתי תגיע הניידת אל הרכב, בשתי הדרכים הבאות:

(1) תוך שימוש במשוואת מקום-זמן עבור

כל רכב בנפרד.

(2) על ידי המיקום היחסי.

פתרון:

נסמן את הרכב ב-A ואת ניידת המשטרה ב-B, נבחר את הכיוון החיובי של ציר x בכיוון תנועת הרכבים, ונקבל:

א.

$$v_{AB}=v_A-v_B=90-120=-30\,\text{km/h}$$

כלומר, הרכב נע יחסית לניידת המשטרה במהירות של $30\,\text{km/h}$ בכיוון השלילי.

ב.

$$v_{BA}=v_B-v_A=120-90=+30\,\text{km/h}$$

כלומר, ניידת המשטרה נעה יחסית לרכב במהירות של $30\,\text{km/h}$ בכיוון החיובי.

ג.

(1) נבחר את מיקום ניידת המשטרה בזמן $t=0$ כ-$x=0$ ונקבל:

$$x_A=x_{0A}+v_At=15+90t$$

$$x_B=x_{0B}+v_Bt=0+120t$$

(הצבנו את המהירויות ב-km/h והמקום ביחידת km). המפגש בין הניידת והרכב מתקיים כאשר $x_A=x_B$:

$$120t=15+90t$$

$$\Rightarrow t=15/30=0.5\,\text{h}$$

כלומר לאחר חצי שעה.

(2) יחסית לניידת, מיקום הרכב נתון על ידי:

$$x_{AB}=(x_{AB})_0+v_{AB}t$$

כאשר $(x_{AB})_0=15\,\text{km}$ הוא מיקום הרכב יחסית לניידת בזמן $t=0$, ו-$v_{AB}=-30\,\text{km/h}$ היא מהירות הרכב יחסית לניידת. לכן נקבל:

$$x_{AB}=15-30t$$

המפגש בין הרכב וניידת המשטרה מתרחש כאשר: $x_{AB}=0$:

$$0=15-30t\ \Rightarrow t=0.5\,\text{h}$$

9.2 תאוצה יחסית בתנועה בקו ישר

באותה שיטה בה נקטנו בחישוב המהירות היחסית בקו ישר, ניתן להראות שאם מכונית A נעה לאורך כביש ישר בתאוצה קבועה a_A יחסית לנקודה קבועה על הכביש, ואם מכונית אחרת B נעה לאורך אותו כביש בתאוצה קבועה a_B יחסית לאותה נקודה, אז תאוצת מכונית A יחסית למכונית B היא:

$$a_{AB}=a_A-a_B \tag{48}$$

ותאוצת המכונית B יחסית למכונית A היא:

$$a_{BA}=a_B-a_A \tag{49}$$

על מנת להוכיח שני קשרים אלה, נציין שתאוצת המכונית A יחסית למכונית B (a_{AB}) היא קצב שינוי מהירות המכונית A יחסית למכונית B. על מנת לחשב גודל זה נניח שבזמן $t=t_1$, מהירות המכונית A היא v_{A1} ומהירות המכונית B היא v_{B1} כפי שמתואר באיור 26א. מהירות המכונית A יחסית למכונית B בזמן זה היא:

$$(v_{AB})_1=v_{A1}-v_{B1} \tag{50}$$

על מנת לחשב את קצב השינוי של גודל זה, נניח שבזמן מאוחר יותר (t_2), מהירות המכונית A ביחס לכביש תהייה v_{A2} ומהירות המכונית B ביחס לכביש v_{B2} (ראה איור 26ב). לכן מהירות המכונית A ביחס למכונית B ברגע זה היא:

$$(v_{AB})_2=v_{A2}-v_{B2} \tag{51}$$

קצב שינוי מהירות המכונית A יחסית למכונית B (כלומר תאוצת המכונית A יחסית למכונית B) נתון על ידי:

$$a_{AB}=\frac{\Delta v_{AB}}{\Delta t}=\frac{(v_{AB})_2-(v_{AB})_1}{t_2-t_1}=\frac{(v_{A2}-v_{B2})-(v_{A1}-v_{B1})}{t_2-t_1} \tag{52}$$

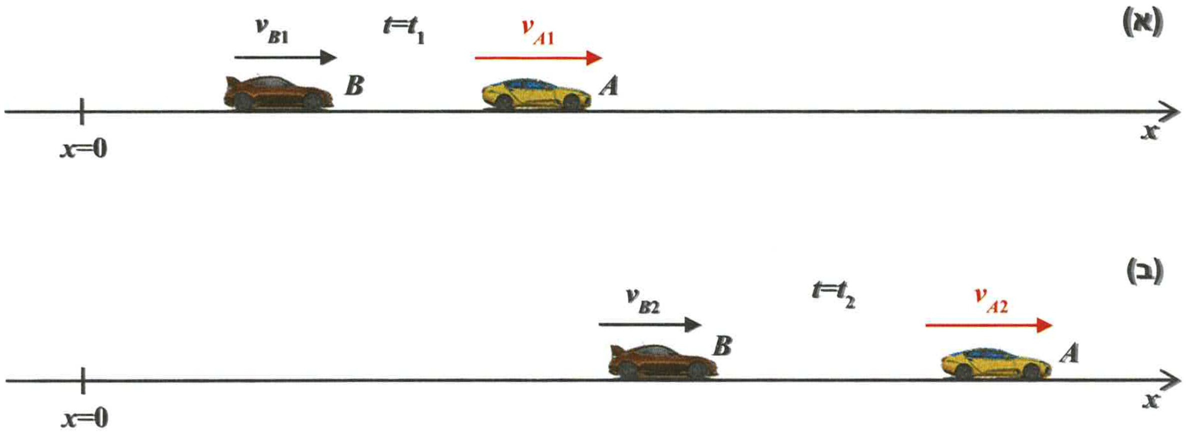
מביטוי זה נקבל:

$$a_{AB}=\left(\frac{v_{A2}-v_{A1}}{t_2-t_1}\right)-\left(\frac{v_{B2}-v_{B1}}{t_2-t_1}\right)=a_A-a_B \qquad (53)$$

ובאותה דרך נקבל:

$$a_{BA}=a_B-a_A \qquad (54)$$

ניתן להוכיח קיום קשרים אלה גם עבור התאוצה הרגעית.



איור 26: (א) המהירויות של הרכבים A ו-B ברגע t_1. (ב) המהירויות של הרכבים A ו-B ברגע t_2.

דוגמה

שני גופים A ו-B נמצאים במנוחה בשני מקומות שונים על ציר x במרחק 50m זה מזה כך ש- $x_A > x_B$. בזמן $t=0$ מתחילים שני הגופים לנוע בכיוון החיובי של הציר. הגוף A נע בתאוצה קבועה שגודלה $5\,\mathrm{m/s^2}$, והגוף B נע בתאוצה קבועה שגודלה $9\,\mathrm{m/s^2}$.

א. חשב את תאוצת הגוף A יחסית לגוף B.

ב. חשב את תאוצת הגוף B יחסית לגוף A.

ג. חשב את זמן המפגש בין שני הגופים בשתי שיטות שונות:

(1) באמצעות משוואת מקום-זמן עבור כל גוף בנפרד.

(2) בהסתמך על משוואת המיקום היחסי.

פתרון:

א. $a_{AB}=a_A-a_B=5-9=-4\,\mathrm{m/s^2}$.

ב. $a_{BA}=a_B-a_A=9-5=+4\,\mathrm{m/s^2}$.

ג.

(1) נבחר $x=0$ מיקום הגוף B ברגע $t=0$ ונקבל:

$$x_B=x_{0B}+v_{0B}+\tfrac{1}{2}a_Bt^2=0+0+\tfrac{1}{2}a_Bt^2$$

$$\Rightarrow x_B=4.5t^2$$

$$x_A=x_{0A}+v_{0A}+\tfrac{1}{2}a_At^2=50+0+\tfrac{1}{2}a_At^2$$

$$\Rightarrow x_A=50+2.5t^2$$

המפגש בין שני הגופים מתרחש כאשר: $x_B=x_A$:

$$4.5t^2=50+2.5t^2$$

$$\Rightarrow 2t^2=50 \quad \Rightarrow t=5\,\mathrm{s}$$

(2) מקום הגוף A יחסית לגוף B נתון על ידי:

$$x_{AB}=\left(x_{AB_0}\right)+\left(v_{AB_0}\right)t+\tfrac{1}{2}a_{AB}t^2$$

כאשר: $x_{AB_0}=50\,\mathrm{m}$, $v_{AB_0}=0$ ו- $a_{AB}=-4\,\mathrm{m/s^2}$. נציב ונקבל:

$$x_{AB}=50-2t^2$$

המפגש בין שני הגופים מתרחש כאשר: $x_{AB}=0$. לכן נקבל:

$$0=50-2t^2 \quad \Rightarrow t=5\,\mathrm{s}$$

10. סיכום נושא משוואות התנועה בקו ישר ובתאוצה קבועה

עבור גוף הנע בקו ישר ובתאוצה קבועה a כך שמיקומו בזמן $t=0$ הוא x_0, מהירותו בזמן זה היא v_0 ולאחר זמן t מהירותו היא v, מתקיימות המשוואות הבאות:

1. המהירות הממוצעת של הגוף בפרק הזמן $0-t$:

$$\bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{v_0+v}{2}=v_0+\tfrac{1}{2}at \tag{55}$$

2. העתק הגוף:

$$\Delta x=\left(\frac{v_0+v}{2}\right)t=\frac{v^2-v_0^2}{2a} \tag{56}$$

3. מהירות הגוף כפונקציה של הזמן:

$$v=v_0+at \tag{57}$$

4. מיקום הגוף כפונקציה של הזמן:

$$x=x_0+v_0t+\tfrac{1}{2}at^2 \tag{58}$$

סיכום פרק 2

1. תנועה היא שינוי מיקומו של גוף במהלך הזמן.
2. מיקומו של הגוף בזמן מסוים נקבע על ידי הקואורדינטה x של הנקודה שבה נמצא הגוף בזמן זה על ציר x שנבחר.
3. תיאור תנועה בפיזיקה משמעו תיאור מיקומו של גוף הנמצא בתנועה כפונקציה של הזמן, וזאת בעזרת אמצעים מתמטיים שהם: טבלת מיקום זמן, גרף או ביטוי מתמטי.
4. הדרך שגוף עובר בפרק זמן מסוים מוגדרת כאורך המסלול שלאורכו נע הגוף בפרק זמן זה. נהוג לסמן את הדרך באות s.
5. העתק גוף בפרק זמן מסוים שמסומן ב- Δx מוגדר כמיקום הגוף בסוף פרק הזמן ביחס למיקומו בהתחלת פרק זמן זה. על פי הגדרה זו, בתנועה לאורך קו ישר, ההעתק שווה להפרש האלגברי בין קואורדינטת מיקום הגוף בסוף פרק הזמן לבין קואורדינטת מיקומו בתחילת פרק זמן זה: $\Delta x=x_2-x_1$.
6. מהירות גוף מוגדרת כקצב שינוי המיקום שלו.
7. אם גוף נע בקו ישר במהירות קבועה, מהירותו נתונה על ידי הביטוי: $v=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$.
8. המהירות הממוצעת של גוף בפרק זמן מסוים מוגדרת כמהירות הקבועה בגודל ובכיוון אשר אם הגוף נע בה, העתקו יהיה זהה באותו פרק זמן. במלים אחרות היא המהירות הקבועה בגודל ובכיוון אשר אם הגוף נע בה הוא מגיע לאותו מיקום באותו פרק זמן. מהירות ממוצעת מסומנת ב- $\bar{v}$ והיא נתונה על ידי:

$$\bar{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

9. מהקשר האחרון נקבל: $\Delta x=\bar{v}\Delta t$.
10. המהירות הרגעית של גוף הנמצא בתנועה היא מהירות גוף זה ברגע מסוים. מהירות זו מוגדרת על ידי הביטוי:

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)$$

המהירות הרגעית בזמן מסוים t היא שיפוע המשיק לגרף המתאר את מיקום הגוף כפונקציה של הזמן, בנקודה הנמצאת על הגרף המתאימה לזמן t. שיפוע המשיק נקרא גם שיפוע הגרף בנקודה זו ומהווה את ערך הנגזרת בנקודה זו של הפונקציה המתארת את הגרף.

11. כאשר נתון שגוף נע **במהירות קבועה**, הכוונה היא תמיד לכך שגודל המהירות וגם כיוון המהירות הם קבועים. תנועה זו נקראת גם **תנועה שוות מהירות**.
12. אם גודל המהירות קבוע אבל כיוונה משתנה במהלך תנועת הגוף, טעות לתאר תנועה זו

כתנועה במהירות קבועה או תנועה שוות מהירות. תנועה זו נקראת **תנועה קצובה**.

13. המיקום כפונקציה של הזמן עבור גוף הנע בקו יש במהירות שגודלה קבוע נתון על ידי: $x = x_0 + vt$.
14. הגרף המתאר את המיקום כפונקציה של הזמן בתנועה שוות מהירות הוא קו ישר אשר שיפועו מבטא את גודל מהירות הגוף (v) ונקודת חיתוך הגרף עם הציר האנכי (ציר המיקום) היא: $(0,x_0)$ כאשר x_0 הוא מיקום הגוף בזמן $t=0$.
15. התאוצה מוגדרת כגודל פיזיקלי המתאר את קצב השינוי במהירות הגוף. גודל זה מסומן באות a מהמילה הלועזית acceleration.
16. אם גוף נע בקו ישר במהירות המשתנה בקצב **קבוע**, תאוצתו הגוף בפרק זמן מסוים נתונה על ידי:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

17. אם תאוצת הגוף אינה קבועה, אז הביטוי האחרון נותן את התאוצה הממוצעת.
18. יחידות התאוצה היא m/s^2.
19. התאוצה חיובית היא כאשר השינוי במהירות הגוף הוא חיובי וזה קורה כאשר: הגוף מאיץ (מגדיל את מהירותו) בכיוון החיובי. במקרה זה $a > 0$ ו- $v > 0$ או כאשר הגוף מאט (מקטין את מהירותו) בכיוון השלילי. במקרה זה $a > 0$ ו- $v < 0$.
20. התאוצה שלילית היא כאשר הגוף מאט (מקטין את מהירותו) בכיוון החיובי. במקרה זה $a < 0$ ו- $v > 0$, או כאשר הגוף מאיץ (מגדיל את מהירותו) בכיוון השלילי. במקרה זה $a < 0$ ו- $v < 0$.
21. המהירות כפונקציה של הזמן בתנועה בקו ישר בתאוצה קבועה a נתונה על ידי הביטוי: $v = v_0 + at$, כאשר v_0 היא מהירות הגוף ב- $t = 0$. הגרף המתאר את המהירות כפונקציה של הזמן במקרה זה הוא קו ישר ששיפועו הוא תאוצת הגוף, a וחיתוכו עם הציר האנכי (ציר המהירות) מבטא את מהירות הגוף בזמן $t = 0$, כלומר v_0.
22. המהירות הממוצעת בתנועה בקו ישר בתאוצה קבועה בפרק זמן מסוים נתונה על ידי:

$$\bar{v} = \frac{v_0 + v}{2} = v_0 + a(t/2)$$

23. המיקום כפונקציה של הזמן בתנועה בקו ישר ובתאוצה קבועה a נתון על ידי: $x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$, כאשר x_0 ו- v_0 הם מיקום הגוף ומהירותו בזמן $t = 0$, בהתאמה. הגרף המתאר פונקציה זו הוא פרבולה.
24. בתנועה בקו ישר ובתאוצה קבועה מתקיימים הקשרים הבאים עבור ההעתק:

$$\Delta x = \left(\frac{v_0 + v}{2}\right)t$$

$$\Delta x = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$$

25. אם נתון גרף המתאר את המיקום כפונקציה של הזמן עבור גוף הנע בקו ישר בתאוצה לא קבועה אז מתקיים: שיפוע הגרף בכל נקודה מייצג את המהירות הרגעית של הגוף בזמן השייך לנקודה זו.
26. אם נתון גרף המתאר את המהירות כפונקציה של הזמן עבור גוף הנע בקו ישר בתאוצה לא קבועה אז מתקיים: שיפוע הגרף בכל נקודה מייצג את התאוצה הרגעית של הגוף בזמן השייך לנקודה זו.
27. השטח הכלוא בין גרף המהירות כפונקציה של הזמן ובין ציר הזמן עד לרגע מסוים שווה להעתקן הגוף עד לרגע זה.
28. אם נתונים שני גופים A ו- B אשר נעים לאורך קו ישר, הגוף A במהירות v_A והגוף B במהירות v_B, אז מהירות הגוף A ביחס לגוף B נתונה באמצעות הביטוי: $v_{AB} = v_A - v_B$ ומהירות הגוף B ביחס לגוף A נתונה באמצעות הביטוי: $v_{BA} = v_B - v_A$. מתקיים $v_{AB} = -v_{BA}$.
29. אם נתונים שני גופים A ו- B אשר נעים לאורך קו ישר, הגוף A בתאוצה a_A והגוף B בתאוצה a_B, אז תאוצת הגוף A ביחס לגוף B נתונה באמצעות הביטוי: $a_{AB} = a_A - a_B$ ותאוצת הגוף B ביחס לגוף A נתונה באמצעות הביטוי: $a_{BA} = a_B - a_A$. מתקיים $a_{AB} = -a_{BA}$.

תרגילים ובעיות – פרק 2

1. קינמטיקה

.1

א. הגדר את המונחים "קינמטיקה" ו- "דינמיקה".

ב. הגדר את המונח "תנועה".

ג. כיצד נקבע המקום בתנועה בקו ישר? הסבר.

.2

א. מהי המשמעות המתמטית של תיאור תנועת גוף הנע בקו ישר?

ב. מהם האמצעים המתמטיים המשמשים לתיאור תנועה? הסבר.

.3

בטבלה שלפניך מוצגים נתוני המיקום כפונקציה של הזמן של גוף הנע בקו ישר:

$t(s)$	$x(m)$
0	4
1	5
2	6
3	7
4	8
5	9
6	10
7	11
8	12

א. שרטט גרף המתאר את מיקום הגוף כפונקציה של הזמן.

ב. קבע מהו כיוון תנועת הגוף, וקבע האם הוא מתקרב לראשית הצירים או מתרחק ממנה.

ג. האם קצב שינוי המיקום קבוע? הסבר.

ד. התייחס לגרף ששרטטת ומצא את משוואת הקו הישר המתאר את המיקום כפונקציה של הזמן.

.4

המקום כפונקציה של הזמן עבור גוף הנע בקו ישר מתואר בטבלה שלפניך:

$t(s)$	$x(m)$
0	16
1	14
2	12
3	10
4	8
5	6
6	4
7	2
8	0

א. שרטט גרף המתאר את מיקום הגוף כפונקציה של הזמן.

ב. קבע מהו כיוון תנועת הגוף, וקבע האם הגוף מתקרב לראשית הצירים או מתרחק ממנה.

ג. האם קצב שינוי המיקום קבוע? הסבר.

ד. התייחס לגרף ששרטטת ומצא את משוואת הקו הישר המתאר את המיקום כפונקציה של הזמן.

2. דרך, העתק, מהירות, מהירות ממוצעת ורגעית

.5

א. הגדר את המושג הפיזיקלי "דרך".

ב. הגדר את המושג הפיזיקלי "העתק".

ג. הסבר מתי העתק גוף הוא חיובי, שלילי או אפס.

ד. קבע מתי הדרך שעובר גוף בפרק זמן מסוים שווה להעתק שלו בפרק זמן זה. הסבר.

ה. נתון שהעתק גוף בפרק זמן מסוים מתאפס; האם ניתן להסיק מכך שגם הדרך שעבר הגוף בפרק זמן זה מתאפסת? הסבר.

ו. נתון שהדרך שגוף עובר בפרק זמן מסוים שווה לאפס; האם ניתן להסיק מכך שגם העתק הגוף בפרק זמן זה מתאפס? הסבר.

.6

א. מהו הגודל הפיזיקלי הנמדד על ידי מונה הקילומטרים ברכב? הסבר.

ב. באילו תנאים מונה הקילומטרים ברכב מודד את העתק הרכב? הסבר.

.7

א. באילו תנאים מהירות גוף הנע בקו ישר נחשבת קבועה? הגדר את המהירות במקרה זה, ורשום ביטוי מתמטי עבורה.

ב. ציין שתי היחידות השימושיות ביותר לתיאור מהירות וקבע מהו הקשר ביניהן.

ג. מתי מהירותו של גוף הנע בקו ישר היא חיובית ומתי היא שלילית? הסבר.

8.

א. הגדר מהירות ממוצעת, בפרק זמן מסוים, עבור גוף הנע בקו ישר ורשום ביטוי מתמטי עבור מהירות זו.

ב. קבע מתי המהירות הממוצעת של גוף הנע בקו ישר היא חיובית, שלילית או אפס.

ג. נתון שבפרק זמן מסוים, המהירות הממוצעת של גוף הנע בקו ישר מתאפסת. האם הדרך שעבר הגוף בפרק זמן זה היא בהכרח אפס? הסבר.

ד. נתון שהמהירות הממוצעת, בפרק זמן Δt, של גוף הנע בקו ישר היא $\bar{v}$. רשום ביטוי עבור העתקו של גוף זה בפרק הזמן Δt.

9.

חשב את המהירות הממוצעת במקרים הבאים:

א. אצן רץ בקו ישר במשך 10 דקות במהירות קבועה של $6\,m/s$, ולאחר מכן הוא ממשיך באותו כיוון במהירות של $4\,m/s$ למשך 6 דקות נוספות.

ב. אצן רץ בקו ישר ועובר דרך של $500\,m$ במהירות של $5\,m/s$, ולאחר מכן הוא ממשיך באותו כיוון ועובר דרך נוספת של $400\,m$ במהירות של $8\,m/s$.

ג. אצן רץ בקו ישר במהירות מסוימת v ועובר דרך של $1\,km$, לאחר מכן הוא חוזר לנקודת המוצא במהירות של $v/3$.

10.

גוף נע בקו ישר בכיוון החיובי של ציר התנועה. בזמן $t=0$ הוא עובר בנקודה $x=-10\,m$, וב-$t=6\,s$ הוא היה ב-$x=12\,m$, נקודה בה הוא משנה את כיוון תנועתו וחוזר לכיוון הראשית $(x=0)$. הגוף מגיע לראשית הצירים ב-$t=10\,s$. חשב את:

א. ההעתקים של הגוף בכיוון החיובי ובכיוון השלילי.

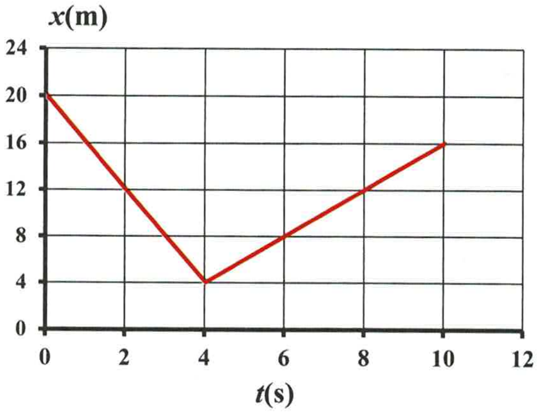
ב. ההעתק הכולל של הגוף בפרק הזמן $(0-10\,s)$.

ג. הדרך שעבר הגוף בפרק הזמן $(0-10\,s)$.

ד. המהירות הממוצעת של הגוף בפרק הזמן $(0-10\,s)$.

11.

הגרף שלפניך מתאר את המיקום של גוף הנע בקו ישר כפונקציה של הזמן.



א. קבע מתי הגוף נע בכיוון החיובי ומתי הוא נע בכיוון השלילי.

ב. חשב את העתק הגוף בכיוון השלילי ואת העתקו בכיוון החיובי.

ג. חשב את ההעתק הכולל של הגוף בפרק הזמן $0-10\,s$ ואת הדרך שהוא עבר בפרק זמן זה.

ד. חשב את המהירות הממוצעת של הגוף בפרק הזמן $0-10\,s$.

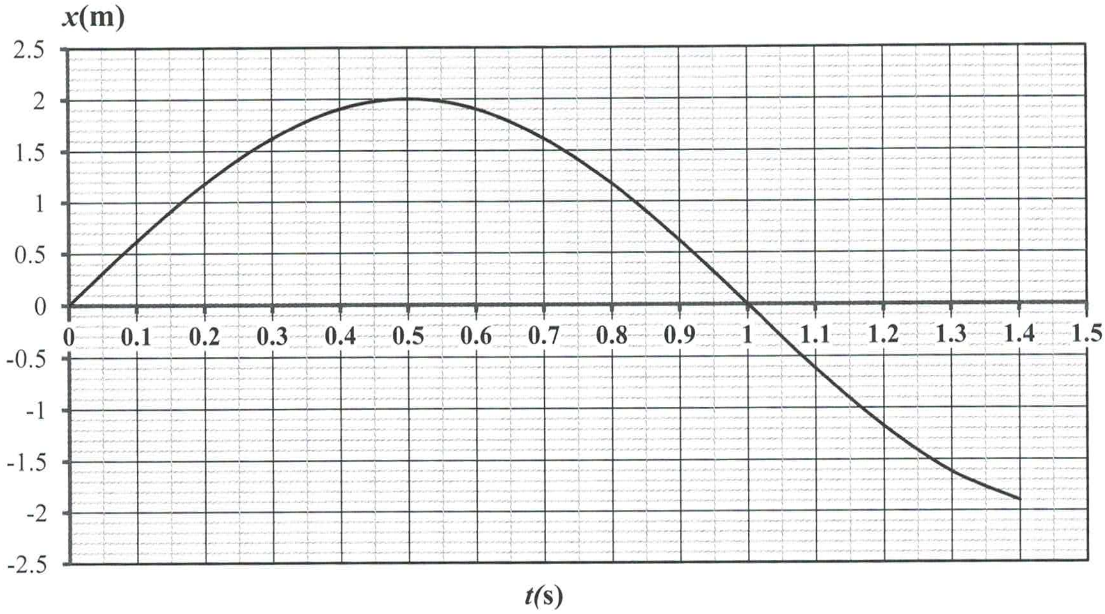
12.

א. הגדר את המונח "מהירות רגעית של גוף".

ב. הסבר את הדרך שבה מודדים את המהירות הרגעית של גוף הנע בקו ישר, ורשום ביטוי מתמטי לחישוב המהירות הרגעית המשקף דרך זו.

.13

הגרף המוצג לפניך מתאר את מיקומו של גוף הנע בקו ישר כפונקציה של הזמן.



א. חשב את המהירות הממוצעת של הגוף בפרקי הזמן הבאים: $(0-1.4s)$, $(0-0.5s)$ ו- $(0.1-0.4s)$.

ב. חשב את המהירות (המהירות הרגעית) של הגוף בזמנים: $t=0.3s$, $t=0.7s$ ו- $t=1s$.

ג. קבע מהו הקשר הגאומטרי-מתמטי בין המהירויות שחישבת בסעיפים א' ו-ב', ובין הגרף הנ"ל.

ד. התבסס על הגרף וקבע באיזה זמן או זמנים המהירות הרגעית של הגוף מתאפסת.

ה. מצא את פרקי הזמן שבהם הגוף נע בכיוון החיובי ואת פרקי הזמן שבהם הגוף נע בכיוון השלילי.

ו. חשב בפרק הזמן הנתון בגרף את:

(1) העתק הגוף בכיוון החיובי ואת העתקו בכיוון השלילי.

(2) ההעתק הכולל של הגוף במהלך תנועתו.

(3) הדרך שעבר הגוף במהלך תנועתו.

.14

הטבלה שלפניך מתארת את המיקום (x) של גוף הנע בקו ישר כפונקציה של הזמן (t):

t(s)	x(m)
0.10	0.200
0.11	0.242
0.12	0.288
0.13	0.338
0.14	0.392
0.15	0.450
0.16	0.512

א. חשב את מהירות הגוף בזמנים המופיעים בטבלה מ- $0.11s$ ועד $0.15s$.

ב. הסבר מדוע לא ניתן לחשב את המהירות בזמנים $0.1s$ ו- $0.2s$.

ג. חשב את המהירות הממוצעת של הגוף בפרק הזמן מ- $t=0.1s$ ועד $t=0.16s$.

3. תנועה שוות מהירות

.15

א. הגדר "תנועה שוות מהירות".

ב. הגדר "תנועה קצובה".

ג. קבע:

(1) האם כל תנועה שוות מהירות היא תנועה קצובה? הסבר.

(2) האם כל תנועה קצובה היא תנועה שוות מהירות? הסבר.

.16

גוף נע בקו ישר במהירות קבועה של $5m/s$. בזמן $t=0$ הגוף עובר בנקודה $x=-20m$.

א. רשום ביטוי מתמטי המתאר את מיקום הגוף (x) כפונקציה של הזמן (t).

ב. מצא את:

(1) הזמן שבו הגוף עובר ב- $x=0$.

(2) מיקום הגוף ב-$t=8\text{s}$.

(3) העתק הגוף בפרק הזמן בין $t=0$ ו-$t=10\text{s}$.

ג. שרטט גרף המתאר את מיקום הגוף כפונקציה של הזמן בפרק הזמן $0-8\text{s}$.

17.

שני אצנים רצים זה לקראת זה על כביש ישר. האצן הראשון נע במהירות קבועה של $6\,\text{m/s}$, והאצן האחר רץ במהירות שגודלה $9\,\text{m/s}$ בכיוון הנגדי. ברגע $t=0$ המרחק בין שני האצנים היה 90m. בחר את הכיוון החיובי של ציר התנועה בכיוון תנועת האצן הראשון, ואת ראשית הצירים $(x=0)$ בנקודה שבה נמצא אצן זה ב-$t=0$.

א. בטא את המיקום כפונקציה של הזמן עבור כל אחד משני האצנים.

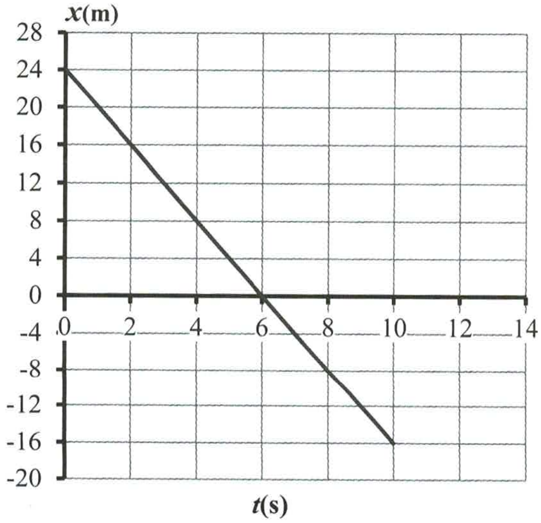
ב. מצא מתי והיכן שני האצנים חולפים זה על פני זה.

ג. מצא את הזמנים שבהם כל אחד משני האצנים מגיע למיקום שבו היה האצן האחר ב-$t=0$.

ד. שרטט, באותה מערכת צירים, שני גרפים המתארים את המיקום כפונקציה של הזמן עבור שני האצנים. התייחס לפרקי הזמן מ-$t=0$ ועד לזמן שבו כל אצן הגיע לנקודה שבה היה האצן האחר ב-$t=0$.

18.

הגרף שלפניך מתאר את המיקום כפונקציה של הזמן עבור גוף הנע בקו ישר.



א. חשב את מהירות הגוף וקבע מהו כיוון תנועתו.

ב. מצא את פרקי הזמן שבהם הגוף נע בחלק החיובי של הציר, ואת פרקי הזמן שבהם הוא נע בחלקו השלילי.

ג. חשב את העתק הגוף בפרק הזמן $0-10\text{s}$ ואת הדרך שהוא עבר בפרק זמן זה.

ד. בטא את מיקום הגוף (x) כפונקציה של הזמן (t).

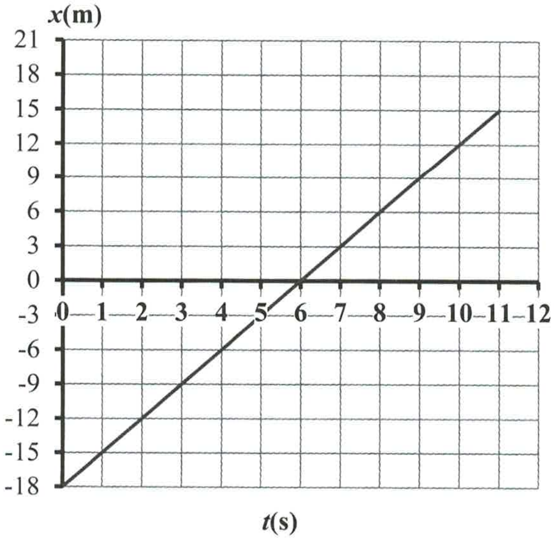
ב-$t=0$ עובר גוף אחר בנקודת הראשית $x=0$. גוף זה נע בכיוון החיובי במהירות קבועה של $2\,\text{m/s}$.

ה. מצא מתי והיכן שני הגופים חולפים זה על פני זה.

ו. שרטט במערכת הצירים הנתונה גרף נוסף המתאר את המיקום כפונקציה של הזמן עבור הגוף השני.

19.

הגרף שלפניך מתאר את המיקום של גוף הנע בקו ישר כפונקציה של הזמן.



א. חשב את מהירות הגוף וקבע מהו כיוון תנועתו.

ב. מצא את פרקי הזמן שבהם הגוף נע בחלק החיובי של הציר, ואת פרקי הזמן שבהם הוא נע בחלק השלילי שלו.

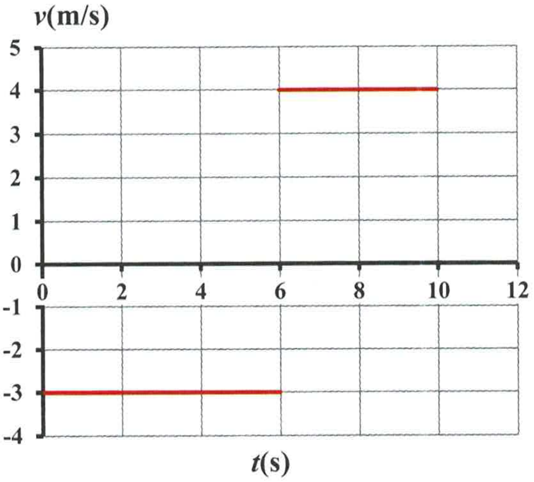
ג. חשב את העתק הגוף בפרק הזמן $0-11\text{s}$ ואת הדרך שהוא עבר בפרק זמן זה.

ד. רשום ביטוי מתמטי המתאר את מיקום הגוף (x) כפונקציה של הזמן (t).

20.

הגרף שלפניך מתאר את המהירות של גוף הנע בקו ישר כפונקציה של הזמן. נתון שבזמן

$t=0$ הגוף היה ב- $x=6\text{m}$.



א. קבע מתי הגוף נע בכיוון החיובי של ציר התנועה, ומתי הוא נע בכיוון השלילי. הסבר.

ב. חשב בפרק הזמן $0-10\text{s}$ את:

(1) העתק הגוף בכיוון החיובי ואת העתקו בכיוון השלילי.

(2) ההעתק הכולל של הגוף, ואת הדרך אותה עבר.

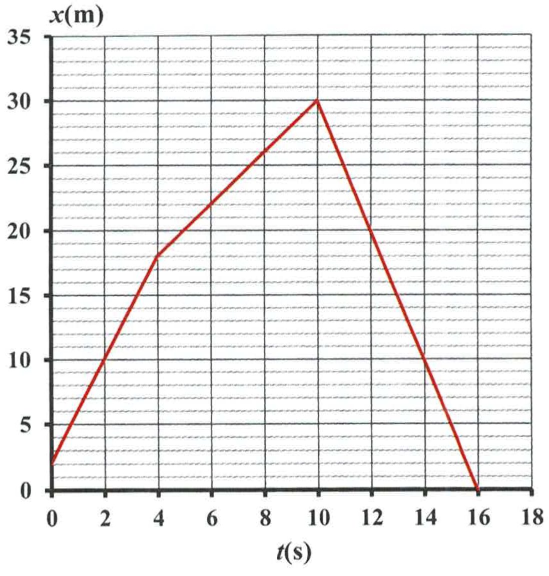
(3) המהירות הממוצעת של הגוף.

ג. בטא את המיקום (x) של הגוף כפונקציה של הזמן (t) בפרק הזמן $(0-10\text{s})$.

ד. שרטט גרף המתאר את מיקום הגוף כפונקציה של הזמן בפרק הזמן $(0-10\text{s})$.

.21

הגרף שלפניך מתאר את המיקום של גוף הנע בקו ישר כפונקציה של הזמן.



א. חשב את מהירות הגוף בשלבי התנועה השונים.

ב. חשב את ההעתקים החלקיים של הגוף במהלך תנועתו ואת ההעתק הכולל שלו עד ל- $t=16\text{s}$.

ג. חשב את הדרך שעבר הגוף עד לזמן $t=16\text{s}$.

ד. חשב את המהירות הממוצעת של הגוף בפרק הזמן $0-16\text{s}$.

ה. בטא את המקום (x) של הגוף כפונקציה של הזמן (t) עד לזמן $t=16\text{s}$.

4. התאוצה

.22

א. הגדר תאוצה וציין מהי יחידת התאוצה.

ב. גוף נע בתאוצה של $a=2\text{m/s}^2$. הסבר את המשמעות של נתון זה.

ג. גוף נע בתאוצה של $a=-3\text{m/s}^2$. הסבר את המשמעות של נתון זה.

.23

א. מתי תאוצת גוף היא חיובית? האם תאוצה חיובית משמעה שהגוף מאיץ את מהירותו? הסבר.

ב. מתי תאוצת גוף היא שלילית? האם תאוצה שלילית משמעה שהגוף מאט את מהירותו? הסבר.

.24

חשב את התאוצה במקרים הבאים. נתון שבכל המקרים תאוצת הגוף קבועה.

א. גוף נע בכיוון החיובי של הציר. בזמן $t=0$ מהירותו היא 4m/s וב- $t=5\text{s}$ מהירותו היא 24m/s.

ב. גוף נע בכיוון החיובי של הציר. בזמן $t=0$ מהירותו היא 12m/s וב- $t=4\text{s}$ מהירותו היא 4m/s.

ג. גוף נע בכיוון השלילי של הציר. בזמן $t=0$ מהירותו היא 4m/s וב- $t=5\text{s}$ מהירותו היא 24m/s.

ד. גוף נע בכיוון השלילי של הציר. בזמן $t=0$ מהירותו היא 12m/s וב- $t=4\text{s}$ מהירותו היא 4m/s.

.25

כדור נע על רצפת חדר במהירות קבועה שגודלה 10m/s, ומתנגש בקיר בניצב לו ומוחזר ממנו בכיוון הנגדי במהירות שגודלה זהה. נתון שמשך התנגשות הכדור בקיר הוא

$0.2\,s$. בחר את הכיוון החיובי בכיוון תנועת הכדור לפני ההתנגשות וחשב את התאוצה הממוצעת של הכדור במהלכה.

5. המהירות בתנועה בקו ישר ובתאוצה קבועה

26.

רכב נע על כביש ישר במהירות קבועה של $30\,m/s$. בזמן שנבחר להיות $t=0$ הרכב מתחיל להקטין את מהירותו בקצב קבוע של $3\,m/s^2$.

א. בטא את מהירות הרכב כפונקציה של הזמן החל מ-$t=0$ ועד לעצירתו.

ב. חשב את הזמן שבו נעצר הרכב.

ג. חשב את המהירות הממוצעת של הרכב בפרק הזמן מ-$t=0$ ועד לעצירתו.

ד. חשב את העתק הרכב מ-$t=0$ ועד לעצירתו.

27.

אופנוע נע על כביש ישר במהירות קבועה. ב-$t=0$ מתחיל האופנוע להאיץ בתאוצה קבועה של $4\,m/s^2$.

א. חשב את השינוי במהירות האופנוע במהלך השנייה הראשונה של תאוצתו.

ב. חשב את השינוי במהירות האופנוע במהלך השנייה הרביעית של תאוצתו.

ג. חשב את השינוי במהירות האופנוע בפרק הזמן מ-$t=5\,s$ ועד $t=8\,s$.

28.

רכב נע על כביש ישר במהירות קבועה v_0. בזמן שנבחר להיות $t=0$ הרכב מתחיל להאט את מהירותו בקצב קבוע ונעצר בזמן $t=10\,s$. בפרק הזמן מ-$t=0$ ועד $t=10\,s$ העתק הרכב הוא $120\,m$.

א. חשב את המהירות הממוצעת של הרכב בפרק הזמן $0-10\,s$.

ב. חשב את המהירות ההתחלתית v_0 של הרכב.

ג. חשב את תאוצת הרכב.

29.

גוף הנמצא במנוחה מתחיל לנוע ב-$t=0$ בקו ישר בתאוצה קבועה של $3\,m/s^2$ ונע כך במשך 6 שניות. ב-$t=6\,s$ מתחיל להקטין את מהירותו בקצב קבוע של $2\,m/s^2$.

א. בטא את מהירות הגוף כפונקציה של הזמן במהלך פרק הזמן $(0-6\,s)$, וחשב את מהירותו בסוף פרק זמן זה.

ב. בטא את מהירות הגוף כפונקציה של הזמן לאחר $t=6\,s$ ועד לעצירתו.

ג. מצא את הזמן שבו הגוף נעצר (ביחס ל-$t=0$).

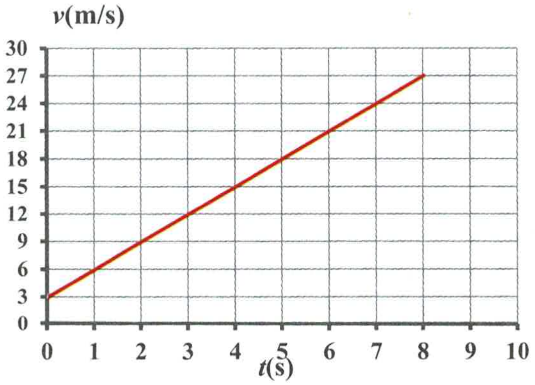
ד. שרטט גרף המתאר את מהירות הגוף כפונקציה של הזמן מ-$t=0$ ועד לעצירתו.

ה. חשב את העתק הגוף מ-$t=0$ ועד לעצירתו.

ו. חשב את המהירות הממוצעת של הגוף.

30.

הגרף שלפניך מתאר את המהירות של גוף הנע בקו ישר כפונקציה של הזמן.



נתון שמיקום הגוף בזמן $t=0$ הוא $x_0=6\,m$.

א. חשב את תאוצת הגוף.

ב. תאר במלים את תנועת הגוף.

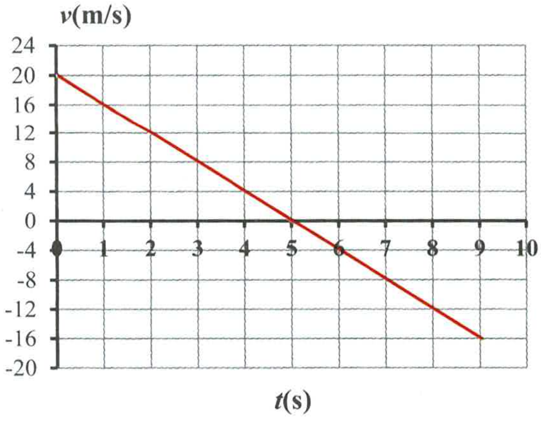
ג. חשב את המהירות הממוצעת של הגוף בפרק הזמן $0-8\,s$.

ד. חשב את מיקום הגוף ב-$t=8\,s$.

ה. חשב את מיקום הגוף ב-$t=5\,s$.

31.

הגרף שלפניך מתאר את המהירות של גוף, הנע לאורך ציר x, כפונקציה של הזמן.



נתון כי ב-$t=0$ הגוף היה ב-$x=10\text{m}$.

א. חשב את תאוצת הגוף.

ב. תאר את תנועת הגוף בפרק הזמן $0-5\text{s}$.

ג. תאר את תנועת הגוף בפרק הזמן $5-9\text{s}$.

ד. מצא את תאוצת הגוף ב-$t=5\text{s}$.

ה. מצא את העתק הגוף עד $t=5\text{s}$ ואת מקומו בזמן זה.

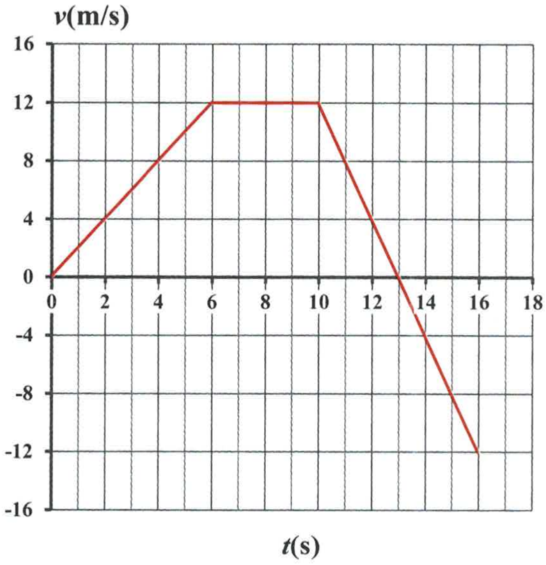
ו. מצא את העתק הגוף בפרק הזמן $0-9\text{s}$ ואת מיקומו בזמן זה.

ז. מצא את הדרך שעבר הגוף בפרק הזמן $0-9\text{s}$.

ח. חשב את המהירות הממוצעת של הגוף בפרק הזמן $0-9\text{s}$.

32.

הגרף שלפניך מתאר את המהירות של גוף, הנע בקו ישר, כפונקציה של הזמן.



א. חשב את תאוצת הגוף בשלבי התנועה השונים.

ב. קבע מתי הגוף נע בכיוון החיובי ומתי הוא נע בכיוון השלילי. הסבר.

ג. תאר במילים את תנועת הגוף בפרקי הזמן: $(0-6\text{s})$, $(6-10\text{s})$, $(10-13\text{s})$ ו-$(13-16\text{s})$.

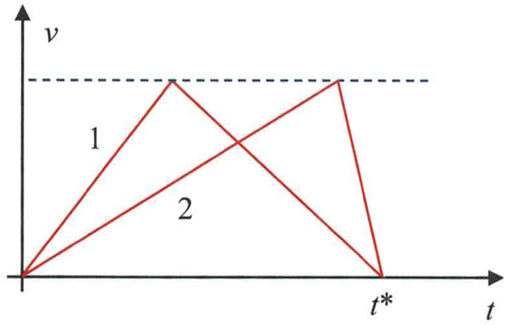
ד. חשב את ההעתק המקסימלי של הגוף בכיוון החיובי.

ה. חשב את ההעתק הכולל של הגוף מתחילת תנועתו ועד $t=16\text{s}$ ואת הדרך שעבר במהלך זמן זה.

ו. חשב את המהירות הממוצעת של הגוף בפרק הזמן מ- $t=0$ ועד $t=16\text{s}$.

33.

הגרף המוצג לפניך מתאר את המהירות כפונקציה של הזמן עבור שני גופים 1 ו-2 הנעים בקו ישר:

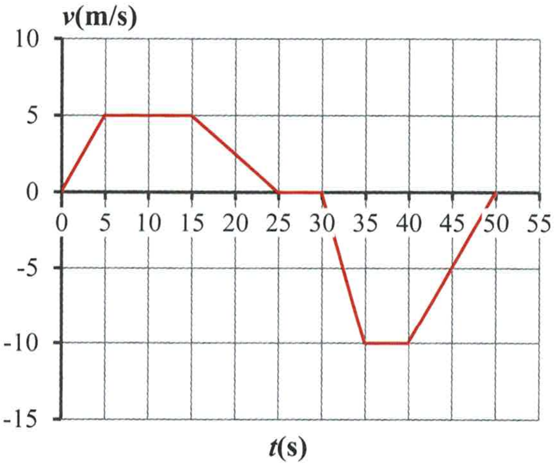


א. קבע למי משני הגופים מהירות ממוצעת גדולה יותר בפרק הזמן המתואר בגרף. הסבר את תשובתך.

ב. נתון שבזמן $t=0$ שני הגופים היו באותה נקודה. קבע מתי הם נפגשים שוב.

34.

הגרף שלפניך מתאר את המהירות כפונקציה של הזמן עבור מעלית בבניין גבוה מאוד. נתון שבזמן $t=0$ המעלית הייתה בקומה ה-20. נתון שגובה כל קומה בבניין זה הוא 2.5m.



הכיוון החיובי נבחר בכיוון מעלה.

א. התבסס על הגרף הנתון ותאר את תנועת המעלית באמצעות השלמת הטבלה הבאה:

פרק הזמן	תיאור התנועה
$0-5\text{s}$	תנועה בתאוצה קבועה בכיוון החיובי
$5-15\text{s}$	
$15-25\text{s}$	
$25-30\text{s}$	
$30-35\text{s}$	

$35-40\text{s}$	
$40-50\text{s}$	

ב. מצא את הגובה המקסימלי אליו מגיעה המעלית ביחס למיקומה ב-$t=0$, ואת מספר הקומות עד לגובה זה.

ג. מצא את ההעתק הכולל של המעלית בפרק הזמן $(0-50\text{s})$ ומצא את הדרך שעברה במהלך פרק זמן זה.

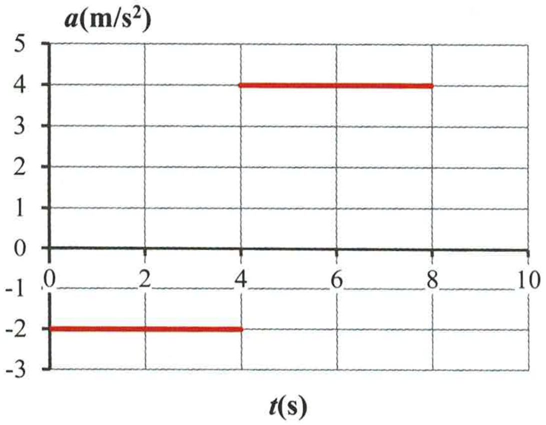
ד. חשב את המהירות הממוצעת של המעלית במהלך תנועתה.

ה. מצא את מיקום המעלית בסוף תנועתה ביחס לקרקע.

ו. שרטט גרף המתאר את תאוצת המעלית בפרקי הזמן השונים.

.35

הגרף שלפניך מתאר את התאוצה כפונקציה של הזמן עבור גוף הנע בקו ישר:



נתון שמהירות הגוף בזמן $t=0$ היא 10m/s.

א. בטא את מהירות הגוף כפונקציה של הזמן החל מ-$t=0$ ועד $t=8\text{s}$.

ב. שרטט גרף המתאר את מהירות הגוף כפונקציה של הזמן בפרק הזמן $0-8\text{s}$.

ג. היעזר בגרף מהירות-זמן ששרטטת וחשב את:

(1) העתק הגוף בפרק הזמן $0-8\text{s}$.

(2) המהירות הממוצעת של הגוף בפרק הזמן $0-8\text{s}$.

.36

בטבלה שלפניך מתואר המיקום כפונקציה של הזמן עבור גוף הנע בקו ישר:

t(s)	x(m)
0.0	0.00
0.1	1.17
0.2	2.28
0.3	3.33
0.4	4.32
0.5	5.25
0.6	6.12
0.7	6.93
0.8	7.68
0.9	8.37
1.0	9.00

א. חשב את מהירות הגוף בכל אחד מהזמנים הרשומים בטבלה מ-$t=0.1\text{s}$ ועד $t=0.9\text{s}$.

ב. הסבר מדוע לא ניתן לחשב את המהירויות בזמנים $t=0$ ו-$t=1\text{s}$.

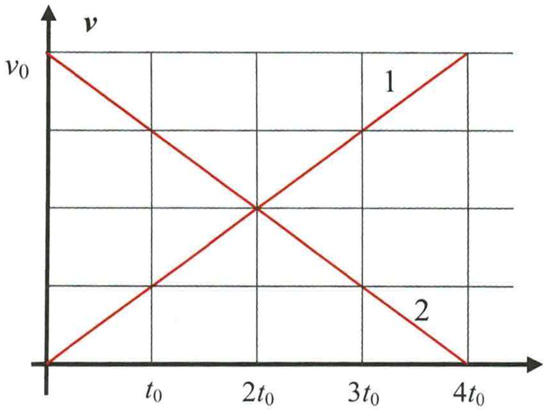
ג. על סמך התוצאות שקיבלת בסעיף א', שרטט גרף המתאר את מהירות הגוף כפונקציה של הזמן.

ד. האם תאוצת הגוף קבועה? אם כן חשב אותה, ואם לא הסבר מדוע.

ה. חשב את העתק הגוף בפרק הזמן $0-1\text{s}$.

.37

רכב מתחיל לנוע ממנוחה בזמן $t=0$ בתאוצה קבועה, ובאותו זמן חולף לידו אופנוע שנמצא בהאטה. הגרף שלפניך מתאר את מהירויות הרכב והאופנוע כפונקציה של הזמן.



א. קבע איזה מבין שני הגרפים שייך לאופנוע ואיזה לרכב.

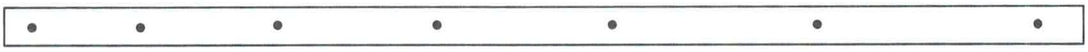
ב. קבע מתי האופנוע והרכב חולפים שוב זה ליד זה לאחר $t=0$.

ג. קבע מי מקדים בזמן $t=2t_0$, האופנוע או הרכב, ומצא את המרחק ביניהם בזמן זה. בטא את תשובתך בעזרת הגדלים v_0 ו-t_0.

.38

על מנת למדוד את התאוצה של עגלת ניסוי הנעה במעבדה בתאוצה קבועה, קשר תלמיד סרט נייר לעגלה והעביר אותו דרך רשם זמן. רשם הזמן מסמן על סרט הנייר נקודות בזמנים עוקבים שהפרש הזמן ביניהן הוא $0.02\,\text{s}$. הנקודות משמשות לקביעת מיקום העגלה בזמנים אלה.

להלן חלק מהסרט ועליו מספר נקודות עוקבות שהתקבלו בניסוי. הנקודה הראשונה (משמאל) היא לא בהכרח הנקודה הראשונה שהתקבלה בניסוי.



א. היעזר בסרט הנייר ובסרגל והכן טבלת מקום-זמן עבור תנועת העגלה. בחר $t = 0$ ו-$x = 0\,\text{cm}$ בנקודה הראשונה משמאל.

ב. הוסף לטבלה שהכנת עמודה נוספת והשלם בה את מהירויות העגלה בזמנים השונים.

ג. בעזרת הטבלה שקיבלת בסעיף הקודם שרטט גרף המתאר את מהירות העגלה כפונקציה של הזמן.

ד. התבסס על הגרף ששרטטת בסעיף הקודם וחשב את תאוצת העגלה ואת מהירותה בנקודה הראשונה (בזמן $t = 0$).

6. המיקום כפונקציה של הזמן בתנועה בקו ישר ובתאוצה קבועה

.39

רכב נע בקו ישר ובמהירות קבועה. בזמן $t = 0$ הרכב מתחיל להאט את מהירותו בקצב קבוע עד לעצירה. בחר את הכיוון החיובי של ציר התנועה בכיוון תנועת הרכב, $x = 0$ להיות מיקום הרכב ב-$t = 0$, ושרטט גרפים המתארים באופן איכותי את:

א. מהירות הרכב כפונקציה של הזמן עד לזמן העצירה.

ב. מיקום הרכב כפונקציה של הזמן עד לזמן העצירה.

.40

מכונית מתחילה, בזמן $t = 0$, לנוע ממנוחה בקו ישר ובתאוצה קבועה של $4\,\text{m/s}^2$.

א. בחר את הכיוון החיובי של ציר x בכיוון התנועה, את מיקום המכונית להיות $x = 0$ ב-$t = 0$, וחשב את:

1) מיקום המכונית ב-$t = 8\,\text{s}$.

2) מהירות המכונית בזמן זה.

ב. חשב את העתק המכונית במהלך השנייה החמישית.

ג. חשב את המהירות הממוצעת של המכונית במהלך 5 השניות הראשונות של תנועתה.

.41

אופנוע נע על כביש ישר במהירות קבועה של $12\,\text{m/s}$. בזמן $t = 0$ האופנוע חולף ליד ניידת משטרה החונה בשול הכביש. לאחר מספר שניות וכשהאופנוע היה במרחק $36\,\text{m}$ מהניידת, הניידת מתחילה לנוע בתאוצה קבועה של $6\,\text{m/s}^2$ בכיוון תנועת האופנוע.

א. בחר את הכיוון החיובי של ציר התנועה בכיוון תנועת הרכבים ואת $x = 0$ להיות המיקום של הניידת בזמן $t = 0$ ובטא את מיקומי האופנוע וניידת המשטרה כפונקציה של הזמן.

ב. מתי הניידת חולפת על פני האופנוע והיכן?

ג. חשב את מהירויות האופנוע והניידת בזמן שחישבת בסעיף הקודם.

ד. מצא את הזמן שבו מהירות הניידת משתווה למהירות האופנוע.

ה. שרטט באותה מערכת צירים גרפים המתארים את:

(1) מהירות שני הרכבים כפונקציה של הזמן החל מ-$t = 0$ ועד לזמן המפגש ביניהם.

(2) מיקום שני הרכבים כפונקציה של הזמן החל מ-$t = 0$ ועד לזמן המפגש ביניהם.

.42

שני אופנועים נמצאים במנוחה במרחק $300\,\text{m}$ זה מזה. בזמן $t = 0$ שני האופנועים מתחילים לנוע האחד לכיוון האחר. האופנוע הראשון (הנמצא בצד שמאל) נע בתאוצה קבועה של $4\,\text{m/s}^2$, והאופנוע השני נע

בתאוצה קבועה של $2\,\mathrm{m/s^2}$.

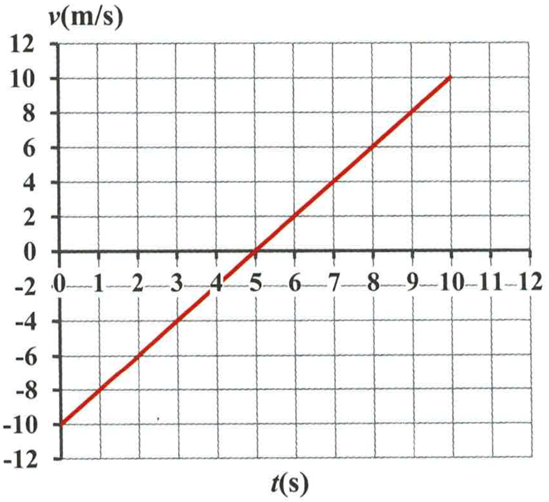
א. בחר את הכיוון החיובי בכיוון תנועת האופנוע הראשון ואת $x=0$ להיות מיקום אופנוע זה ב-$t=0$ ובטא את המיקום כפונקציה של הזמן עבור שני האופנועים.

ב. מתי והיכן שני האופנועים חולפים זה על פני זה?

ג. חשב את מהירותו של כל אחד משני האופנועים בזמן המפגש ביניהם.

43.

הגרף שלפניך מתאר את המהירות של גוף, הנע בקו ישר, כפונקציה של הזמן. נתון שב-$t=0$ הגוף נמצא ב-$x=0$.



א. תאר את תנועת הגוף בפרקי הזמן $0-5\,\mathrm{s}$ ו-$5-10\,\mathrm{s}$.

ב. חשב את תאוצת הגוף.

ג. חשב את ההעתק הגדול ביותר של הגוף בכיוון השלילי ואת ההעתק הגדול ביותר שלו בכיוון החיובי.

ד. חשב את ההעתק הכולל של הגוף בפרק הזמן $0-10\,\mathrm{s}$ ואת הדרך שעבר בפרק זמן זה.

ה. בטא את מיקום הגוף כפונקציה של הזמן.

ו. שרטט גרף המתאר את מיקום הגוף כפונקציה של הזמן בפרק הזמן $0-10\,\mathrm{s}$.

44.

שני אופנועים 1 ו-2 מתחילים לנוע ממנוחה מאותו מקום על כביש ישר, כל אחד בתאוצה קבועה שונה. האופנוע הראשון נע בתאוצה a_1 והאופנוע השני נע בתאוצה $a_2=2a_1$.

א. חשב את היחס בין הזמנים הדרושים לשני האופנועים להגיע לאותו מיקום.

ב. חשב את היחס בין מהירות שני האופנועים לאחר חלוף אותו זמן.

ג. חשב את היחס בין ההעתקים של שני האופנועים לאחר חלוף אותו זמן.

ד. חשב את היחס בין ההעתקים של שני האופנועים ברגע בו יגיעו למהירות זהה.

45.

מכונית מתחילה לנוע ב-$t=0$ ממנוחה בתאוצה קבועה של $2\,\mathrm{m/s^2}$ מנקודה מסוימת הנמצאת על כביש ישר. לאחר 1.5 שניות עובר באותו מקום אופנוע הנע בקו ישר במהירות קבועה של $8\,\mathrm{m/s}$ בכיוון תנועת המכונית.

א. בחר את הכיוון החיובי בכיוון תנועת המכונית ואת $x=0$ בנקודה שממנה התחילה המכונית לנוע, ובטא את מיקום המכונית ואת מיקום האופנוע כפונקציה של הזמן.

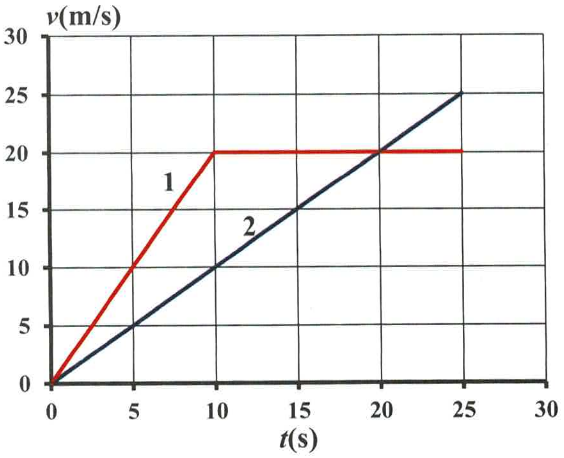
ב. מצא מתי והיכן האופנוע והמכונית חולפים זה על פני זה. הסבר משמעות התשובות המתקבלות.

ג. חשב את מהירות המכונית בזמנים שמצאת בסעיף הקודם.

ד. שרטט באותה מערכת צירים גרפים המתארים את המיקום כפונקציה של הזמן עבור המכונית והאופנוע החל מ-$t=0$ ועד $t=7\,\mathrm{s}$.

46.

הגרף שלפניך מתאר את המהירות כפונקציה של הזמן עבור שני גופים 1 ו-2 אשר מתחילים לנוע מאותה נקודה $(x=0)$.



א. תאר במלים את תנועת כל אחד משני הגופים.

ב. חשב את המרחק בין שני הגופים בזמנים: $t=10\,\text{s}$ ו-$t=20\,\text{s}$ וקבע בכל אחד משני זמנים אלה איזה גוף מקדים את האחר.

ג. כתוב פונקציית מקום-זמן עבור כל אחד משני הגופים.

ד. חשב מתי והיכן נפגשים שני הגופים לאחר $t=0$.

ה. שרטט באותה מערכת צירים גרפים המתארים את המיקום כפונקציה של הזמן של שני הגופים מ-$t=0$ ועד לזמן המפגש ביניהם.

47.

מכונית מתחילה לנוע (ממנוחה) בקו ישר ב-$t=0$. נתון שבמהלך השנייה העשירית לתנועתה, המכונית עוברת דרך של $19\,\text{m}$. חשב את תאוצת המכונית ואת מהירותה בתחילת השנייה העשירית.

7. ביטויים נוספים לחישוב ההעתק בתנועה בתאוצה קבועה

48.

מטוס הנוחת על מסלול נחיתה נוגע במסלול במהירות התחלתית של $60\,\text{m/s}$.

א. מהו אורך המסלול הקצר ביותר המותר על מנת שהמטוס ייעצר לפני סוף המסלול אם נתון שהמטוס מאט את מהירותו בקצב קבוע של $5\,\text{m/s}^2$?

ב. מה צריכה להיות מהירות הנחיתה של המטוס על מנת שייעצר במחצית המסלול שאת אורכו חישבת בסעיף הקודם, כאשר הוא מאט באותו קצב כמו בסעיף הקודם?

49.

רכב נוסע בכביש ישר במהירות של $108\,\text{km/h}$. בזמן מסוים $(t=0)$, מבחין הנהג בעצם הנמצא על הכביש במרחק $180\,\text{m}$ ממנו. נתון שזמן התגובה של הנהג הוא שנייה אחת.

א. חשב באיזו תאוצה מקסימלית (כולל הסימן) יכול הרכב להאט על מנת שייעצר מבלי לפגוע בעצם.

ב. עבור התאוצה שחישבת בסעיף א':

(1) מצא את הזמן שבו הרכב נעצר (ביחס לזמן $t=0$).

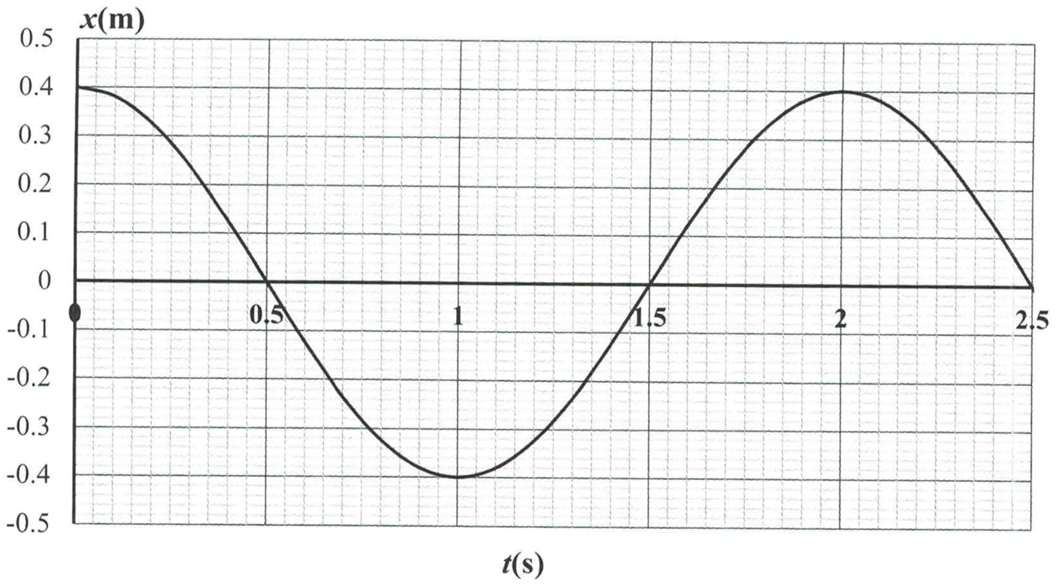
(2) שרטט גרף המתאר את מהירות הרכב כפונקציה של הזמן החל מ-$t=0$ ועד לזמן העצירה.

(3) קבע, ללא חישוב, את גודלו של השטח הכלוא בין הגרף ששרטטת בסעיף הקודם ובין ציר הזמן (ביחידות המתאימות).

8. ניתוח גרפים בתנועה בקו ישר ובתאוצה לא קבועה

50.

הגרף שלפניך מתאר את המיקום כפונקציה של הזמן עבור גוף הנע לאורך קו ישר:



א. קבע מתי:

(1) מהירות הגוף מתאפסת.

(2) מהירות הגוף חיובית.

(3) מהירות הגוף שלילית.

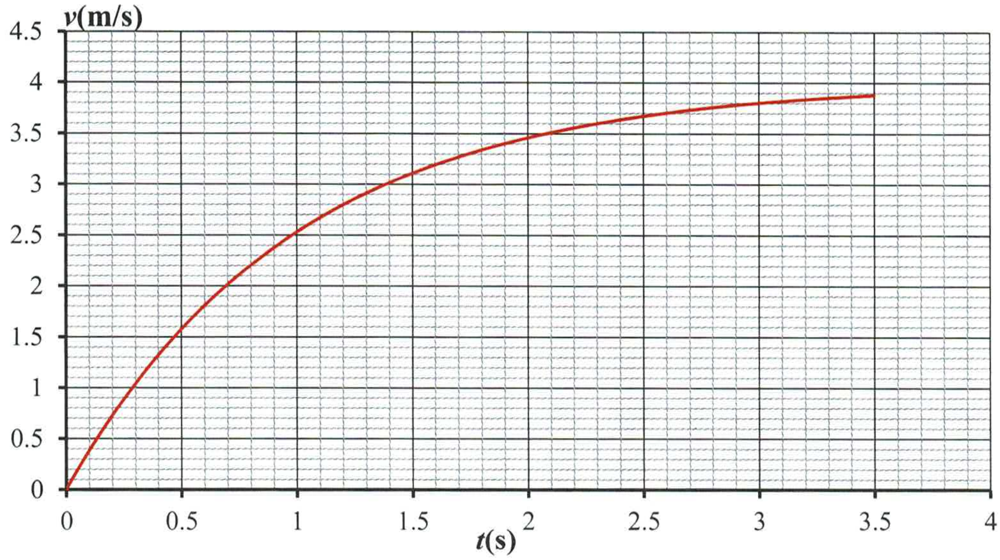
(4) הגוף נע בתאוצה חיובית.

(5) הגוף נע בתאוצה שלילית.

ב. תאר את תנועת הגוף בפרקי הזמן: $(0-0.5s)$, $(0.5-1s)$, $(1-1.5s)$ ו- $(1.5-2s)$.

.51

התרשים שלפניך מתאר את המהירות כפונקציה של הזמן עבור גוף המשוחרר ממנוחה בתוך בריכת מים עמוקים. הכיוון החיובי נבחר כלפי מטה.



א. האם מהירות הגוף גדלה עם הזמן, או קטנה? הסבר.

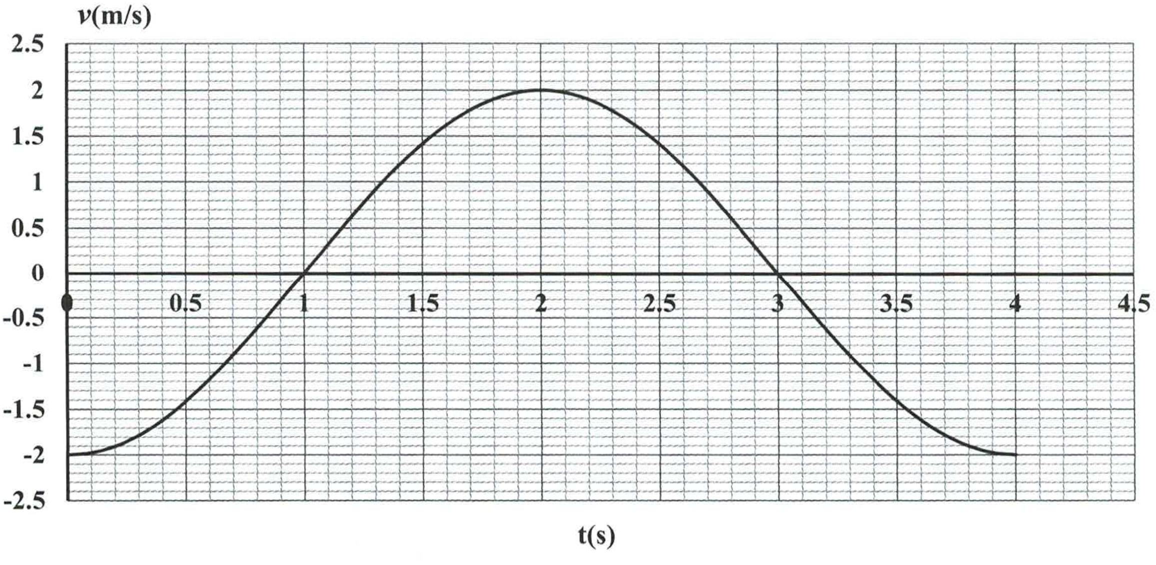
ב. האם תאוצת הגוף גדלה עם הזמן או קטנה? הסבר.

ג. חשב במגבלת הדיוק של הגרף את תאוצת הגוף בזמנים הבאים: $0.3s$, $0.6s$, $1.5s$.

ד. חשב את העתק הגוף עד ל- $t=3s$ אם ידוע שבין הגרף ובין ציר הזמן עד $t=3s$ כלואות כ- 820 משבצות קטנות.

.52

התרשים שלפניך מתאר את המהירות כפונקציה של הזמן עבור גוף הנע לאורך קו ישר:



א. קבע מתי הגוף:
(1) נע בכיוון החיובי ומתי הוא נע בכיוון השלילי.
(2) מאיץ בכיוון החיובי.
(3) מאט בכיוון החיובי.
(4) מאט בכיוון השלילי.
(5) מאיץ בכיוון השלילי.

ב. חשב את תאוצת הגוף בזמנים: $0.5s$, $1s$, $1.5s$ ו-$2s$.

ג. נתון שבין הגרף וציר הזמן בין $t=0$ ו-$t=1s$ כלואות כ-127 משבצות קטנות, ובין הגרף וציר הזמן בין $t=1s$ ו-$t=3s$ כלואות כ-254 משבצות קטנות. חשב את המהירות הממוצעת של הגוף בפרק הזמן (0-3s).

9. מהירות יחסית ותנועה יחסית במקרה של תנועה בקו ישר

53.

רכב 1 נע בקו ישר בכיוון החיובי של ציר התנועה (ציר x) במהירות של $80\,km/h$ יחסית לכביש. חשב מהי מהירות רכב אחר (2) הנע על אותו כביש אם נתון:

א. $v_{21}=+30\,km/h$.

ב. $v_{21}=-40\,km/h$.

ג. $v_{12}=+20\,km/h$.

ד. $v_{12}=-50\,km/h$.

54.

רכב 1 נע על כביש ישר במהירות קבועה של $80\,km/h$, ולפניו נע רכב אחר 2 במהירות של $50\,km/h$ באותו כיוון. נתון שבזמן מסוים שנבחר להיות $(t=0)$ המרחק בין שני הרכבים היה $15\,km$.

א. חשב את מהירות רכב 2 יחסית לרכב 1 (v_{21}).

ב. חשב את מהירות רכב 1 יחסית לרכב 2 (v_{12}).

ג. בחר $x=0$ להיות מיקום הרכב 1 בזמן $t=0$ וחשב מתי רכב 1 חולף על פני רכב 2. ענה על סעיף זה בשתי דרכים:
(1) על ידי פונקציית המיקום לכל רכב בנפרד.
(2) על ידי המהירות היחסית והמיקום היחסי.

55.

ידוע שגופים הנופלים על פני כדור הארץ, נופלים בתאוצה קבועה של כ-$10\,m/s^2$ יחסית לפני הקרקע. משחררים גוף בתוך מעלית. בחר את הכיוון החיובי כלפי מעלה וחשב את תאוצת הגוף יחסית לרצפת המעלית במקרים הבאים:

א. המעלית נעה כלפי מעלה במהירות קבועה של $2\,m/s$.

ב. המעלית נעה כלפי מעלה בתאוצה קבועה של $5\,m/s^2$.

ג. המעלית נעה כלפי מטה בתאוצה קבועה של $5\,m/s^2$.

ד. המעלית נעה כלפי מטה בתאוצה קבועה של $10\,m/s^2$.

56.

בזמן $t=0$ משוחרר גוף (ממנוחה) מנקודה הנמצאת בגובה $1.8\,m$ מעל רצפת מעלית. חשב את הזמן הדרוש לגוף להגיע לרצפת המעלית כאשר:

א. המעלית נמצאת במנוחה.

ב. המעלית עולה כלפי מעלה במהירות קבועה של $4\,m/s$.

ג. המעלית מתחילה ב-$t=0$ לנוע ממנוחה בתאוצה קבועה של $4.4\,m/s^2$ כלפי מעלה.